Quere aufgezogen, die Fussglieder abwärts hängend, das dritte Paar liegt unter den Flügeldecken-Scheiden, welche nur bis an den Vorderrand des vierten Leibes-Abschnittes reichen.

Die Puppengehäuse (Cocons) sind fast walzenförmig, an beiden Enden abgerundet, von einer pergamentartigen Masse verfertigt, welche innen perlweiss, aussen aber sehr dunkelviolett und glänzend ist.

Erklärung der Abbildungen.

Tafel V.

Figur 1. Ein Ei.
„ 2 *a*. Eine Larve in natürlicher Grösse.
„ 2 *b*. Eine Larve vergrössert, von der Bauchseite.
„ 3. Die Oberlippe.
„ 4. Ein Oberkiefer.
„ 5. Die Unterlippe mit dem Kinn.
„ 6. Ein Unterkiefer.
„ 7. Ein Fühler.
„ 8 *a*. Ein Afterdorn von der Seite.
„ 8 *b*. Derselbe vom Rücken anzusehen.
„ 9. Puppengehäuse (Cocons) in natürlicher Grösse.
„ 10. Eine Puppe, vergrössert.

Vorträge.

Über die Kriterien des Grössten und Kleinsten bei den Problemen der Variationsrechnung.

Von **Simon Spitzer**,
Privat-Docent der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

(Fortsetzung der Abhandlung aus dem XII. Bande, S. 1014.)

In dem ersten Memoire, welches ich die Ehre hatte, der hohen Akademie der Wissenschaften vorzulegen, habe ich die Kennzeichen angegeben, welche

$$U = \int_{x_1}^{x_2} V dx$$

zu einem Maximum oder Minimum machen, unter V eine Function verstanden, entweder von x, y, y' oder von x, y, y', y'' oder endlich von x, y, y', y'', y'''.

In jedem dieser drei speciellen Fälle hängen die Kriterien wesentlich von der Form der Function V ab, ich will daher, bevor

ich andere Probleme der Variationsrechnung in Betracht ziehe, einige Untersuchungen bezüglich des Einflusses, den die Form der Function V auf die Kriterien des Grössten und Kleinsten hat, mittheilen.

§. 14.

Es sei

$$V = \varphi\,(x, y, y').$$

Unsere Analyse führte uns hier zur Betrachtung der beiden speciellen Fälle

1.) wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = 0$, und

2.) wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = 0$ und nebstdem noch $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ ist.

Der erstere Fall tritt ein, so oft V von der Form ist:

$$V = f_1\,(x, y) + y'\,f_2\,(x, y)$$

unter f_1 und f_2 willkürliche Functionen verstanden; was aber die Form der Function V im zweiten Falle betrifft, so werden wir, um dieselbe zu finden, uns der Methode der unbestimmten Coëfficienten bedienen, und setzen:

$$f_1\,(x, y) = A_0 + A_1\,y + A_2\,y^2 + A_3\,y^3 + A_4\,y^4 + \ldots$$
$$f_2\,(x, y) = B_0 + B_1\,y + B_2\,y^2 + B_3\,y^3 + B_4\,y^4 + \ldots$$

somit

$$V = (A_0 + A_1\,y + A_2\,y^2 + A_3\,y^3 + A_4\,y^4 + \ldots) + \\ + y'(B_0 + B_1\,y + B_2\,y^2 + B_3\,y^3 + B_4\,y^4 + \ldots)$$

unter $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 \ldots$ Functionen von x verstanden. Man hat alsdann

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = (1.2\,A_2 + 2.3\,A_3\,y + 3.4\,A_4\,y^2 + \ldots) + \\ + y'\,(1.2\,B_2 + 2.3\,B_3\,y + 3.4\,B_4\,y^2 + \ldots)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'} = B_1 + 2\,B_2\,y + 3\,B_3\,y^2 + 4B_4\,y^3 + \ldots$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'}\right)' = (B'_1 + 2B'_2\,y + 3\,B'_3\,y^2 + 4\,B'_4\,y^3 + \ldots) + \\ + y'\,(1.2\,B_2 + 2.3\,B_3\,y + 3.4\,B_4\,y^2 + \ldots)$$

und da

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'}\right)' \tag{65}$$

sein soll, so muss

$$2\,A_2 = B_1'$$
$$3\,A_3 = B_2'$$
$$4\,A_4 = B_3'$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

sein; es ist somit

$$V = (A_0 + A_1\,y + \frac{B_1'}{2}\,y^2 + \frac{B_2'}{3}\,y^3 + \frac{B_3'}{4}\,y^4 + \ldots) +$$
$$+ y'(B_0 + B_1\,y + B_2\,y^2 + B_3\,y^3 + B_4\,y^4 + \ldots)$$

oder

$$V = A_0 + A_1\,y + B_0\,y' + \left[\frac{B_1}{2}\,y^2 + \frac{B_2}{3}\,y^3 + \frac{B_3}{4}\,y^4 + \ldots\right]'.$$

Wir schliessen hieraus auf folgende Form von V

$$V = \varphi\,(x) + y\,\varphi_1\,(x) + y'\,\varphi_2\,(x) + [\psi\,(x, y)]'.$$

für die man auch, unter Beibehaltung derselben Allgemeinheit setzen kann

$$V = y\,F_1\,(x) + [F_2\,(x, y)]'$$

unter φ, φ_1, φ_2, ψ sowohl, als auch unter F_1 und F_2 willkürliche Functionen verstanden [1]).

Anmerkung. Wir haben uns hier, der so oft verschmähten Methode der unbestimmten Coëfficienten bedient; das Resultat, das wir gefunden, ist aber dennoch von allen Mängeln frei, die der genannten Methode anhaften, so ist z. B. nicht nothwendig $[F_2\,(x, y)]'$ in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von y entwickelbar; denn der eben gefundene Werth von V leistet der Gleichung (65) Genüge, wie auch immer die Functionen F_1 und F_2 beschaffen sind. Wir wollen daher auch in der Folge bei ganz ähnlichen Fragen, uns des Nutzens, welche diese Methode gewährt, nicht entschlagen.

Es lässt sich also jederzeit V betrachten unter einer der drei folgenden Formen:

$$V = \varphi\,(x, y, y')$$
$$V = \varphi\,(x, y) + y'\,\psi\,(x, y)$$
$$V = y'\,\varphi\,(x) + [\psi\,(x, y)]'$$

---

[1]) Am Schlusse des §. 8 unseres ersten Memoires sagten wir, dass in diesem Falle Vdx ein vollständiges Differentiale sei; wie man hier sieht, ist aber Vdx gleich einer Summe aus einem vollständigen Differential und einem Ausdruck der Form $y\,F_1\,(x)\,dx$. Dasselbe gilt auch für den Schluss der §§. 10 und 13.

Im ersten Falle, wo $V=\varphi(x, y, y')$ und nicht zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}=0$ ist, wird die Differential-Gleichung, die zur Bestimmung von y dient, von der zweiten Ordnung sein; die in dem Integrale eintretenden zwei Constanten werden bestimmt, durch die den Grenzen x_1 und x_2 entsprechenden Werthe von y_1 und y_2. Alsdann lassen sich die Glieder der zweiten Ordnung der Taylor'schen Reihe auf die Form bringen:

$$\left\{ v\, w^2 \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} (w' + \lambda\, w)^2\, d\, x.$$

Im zweiten Falle, wo $V=\varphi(x,y)+y'\psi(x,y)$ und nicht zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)'$ ist, hat man zur Bestimmung von y eine ganz gewöhnliche Gleichung, und die Glieder der zweiten Ordnung sind dann darstellbar unter der Form:

$$\left\{ v\, w^2 \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right\} w^2\, d\, x;$$

endlich im dritten Falle, wo $V=y\,\varphi(x)+[\psi(x, y)]'$ ist, gibt es gar keinen Werth für y, welcher

$$U=\int_{x_1}^{x_2} \left\{ y\,\varphi(x) + [\psi(x, y]' \right\} d\,x$$

zu einem Maximum oder Minimum macht; denn die Gleichung, welche zur Bestimmung von y dient, nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)' = 0$$

wird hier

$$\varphi(x) = 0$$

und daraus lässt sich natürlich nicht y als Function von x bestimmen. Wäre aber $\varphi(x)$ identisch Null, mit andern Worten, wäre

$$V = [\psi(x, y)]',$$

so hätte man $\int V dx = \psi(x, y)$, und jener Werth von y, welcher $U=\psi(x,y)$ zu einem Maximum oder Minimum macht, ergibt sich aus

$$\frac{d\,\psi(x,y)}{d\,y} = 0$$

und entspricht wirklich einem Maximum oder Minimum von U, wenn $\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2}$, für den aus $\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = 0$ gefundenen Werth von y, negativ oder positiv ist. — Da $\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{d y^2}$ nach der Substitution des gefundenen Werthes von y im Allgemeinen eine Function von x ist, so muss, auf dass die Frage eine ganz bestimmte wird, ein specieller Werth von x gegeben sein.

Wie die Untersuchung dann zu führen sei, wenn $\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial y^2} = 0$ wäre, kann, als hinlänglich bekannt, übergangen werden.

§. 15.

Es sei

$$V = \psi\,(x, y, y', y'').$$

Hier betrachteten wir folgende drei specielle Fälle:

1.) wenn $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = 0$ ist,

2.) wenn nebst dieser Gleichung noch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y''} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial y''}\right)' = 0 \tag{66}$$

stattfindet, endlich

3.) wenn nebst den beiden angeführten Gleichungen noch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y''}\right)'' = 0 \tag{67}$$

besteht.

Im ersten Falle hat V die Form

$$V = f_1\,(x, y, y') + y''\,f_2\,(x, y, y').$$

Um die Form der Function V im zweiten Falle zu bestimmen, setzen wir, uns wieder der Methode der unbestimmten Coëfficienten bedienend

$$f_1\,(x,y,y') = C_0 + C_1\,y' + C_2\,y'^2 + C_3\,y'^3 + C_4\,y'^4 + \ldots$$
$$f_2\,(x,y,y') = D_0 + D_1\,y' + D_2\,y'^2 + D_3\,y'^3 + D_4\,y'^4 + \ldots$$

unter $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 \ldots D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 \ldots$ Functionen von x und y verstanden, demnach ist:

$$V = (C_0 + C_1\,y' + C_2\,y'^2 + C_3\,y'^3 + C_4\,y'^4 + \ldots) +$$
$$+ y''\,(D_0 + D_1\,y' + D_2\,y'^2 + D_3\,y'^3 + D_4\,y'^4 + \ldots)$$

und nun hat man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = (1.2\, C_2 + 2.3\, C_3\, y' + 3.4\, C_4\, y'^2 + \ldots) +$$
$$+ y''(1.2\, D_2 + 2.3\, D_3\, y' + 3.4\, D_4\, y'^2 + \ldots)$$

$$-2\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y''} = -2\left(\frac{\partial D_0}{\partial y} + \frac{\partial D_1}{\partial y} y' + \frac{\partial D_2}{\partial y} y'^2 + \frac{\partial D_3}{\partial y} y'^3 + \frac{\partial D_4}{\partial y} y'^4 \ldots\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y''}\right)' = -\left(\frac{\partial D_1}{\partial x} + 2\frac{\partial D_2}{\partial x} y' + 3\frac{\partial D_3}{\partial x} y'^2 + 4\frac{\partial D_4}{\partial x} y'^3 + \ldots\right) -$$
$$-\left(\frac{\partial D_1}{\partial y} y' + 2\frac{\partial D_2}{\partial y} y'^2 + 3\frac{\partial D_3}{\partial y} y'^3 + 4\frac{\partial D_4}{\partial y} y'^4 + \ldots\right) -$$
$$- y''(1.2\, D_2 + 2.3\, D_3\, y' + 3.4\, D_4\, y'^2 + \ldots).$$

Die Gleichung (66) drückt aus, dass die Summe dieser drei Gleichungen Null sei, dies führt uns daher auf folgende Identitäten:

$$1.2\, C_2 = 1\frac{\partial D_1}{\partial x} + 2\frac{\partial D_0}{\partial y}$$
$$2.3\, C_3 = 2\frac{\partial D_2}{\partial x} + 3\frac{\partial D_1}{\partial y}$$
$$3.4\, C_4 = 3\frac{\partial D_3}{\partial x} + 4\frac{\partial D_2}{\partial y}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

es ist somit:

$$V = C_0 + C_1\, y' +$$
$$+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_0}{\partial y}\right) y'^2 + \left(\frac{1}{3}\frac{\partial D_2}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial D_1}{\partial y}\right) y'^3 + \left(\frac{1}{4}\frac{\partial D_3}{\partial x} + \frac{1}{3}\frac{\partial D_2}{\partial y}\right) + \ldots$$
$$+ y''(D_0 + D_1\, y' + D_2\, y'^2 + D_3\, y'^3 + D_4\, y'^4 + \ldots)$$

oder

$$V = C_0 + C_1\, y' + \frac{\partial D_0}{\partial y} y'^2 + D_0\, y'' + \left(\frac{D_1}{2} y'^2 + \frac{D_2}{3} y'^3 + \frac{D_3}{4} y'^4 + \ldots\right)'.$$

Wir schliessen hieraus auf folgende Form von V

$$V = \varphi(x, y) + y'\, \varphi_1(x, y) + y'^2 \frac{\partial \varphi_2(x, y)}{\partial y} + y''\, \varphi_2(x, y) +$$
$$+ [\psi(x, y, y')]'$$

unter φ, φ_1, φ_2. ψ willkürliche Functionen verstanden, wofür man auch, in derselben Allgemeinheit bleibend

$$V = \varphi(x, y) + y'\, \varphi_1(x, y) + [\psi(x, y, y')]' \tag{68}$$

setzen kann.

Gehen wir endlich zum dritten speciellen Fall über, und suchen wir, was aus dem eben gefundenen V wird, wenn

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y''}\right)'' = 0 \tag{67}$$

ist. Wir haben

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + y'\, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x\, \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} y' + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial y'}\, y''$$

$$- \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y'}\right)' = - \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} y' + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x\, \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} y' + 2 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial y'} y'' + \right.$$
$$+ \frac{\partial^3 \psi}{\partial y\, \partial y'^2}\, y''' + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2\, \partial y\, \partial y'} + 2\, \frac{\partial^4 \psi}{\partial x\, \partial y^2\, \partial y'}\, y' + 2\, \frac{\partial^4 \psi}{\partial x\, \partial y\, \partial y'^2}\, y'' +$$
$$\left. + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^3\, \partial y'}\, y'^2 + 2\, \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2\, \partial y'^2}\, y'\, y'' + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y\, \partial y'^3}\, y''^2 \right\}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y''}\right)'' = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2\, \partial y'}\, y'' + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y\, \partial y'^2}\, y''' + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2\, \partial y\, \partial y'} + 2\, \frac{\partial^4 \psi}{\partial x\, \partial y^2\, \partial y'}\, y' +$$
$$+ 2\, \frac{\partial^4 \psi}{\partial x\, \partial y\, \partial y'^2}\, y'' + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^3 \partial y'}\, y'^2 + 2\, \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2\, \partial y'^2}\, y'\, y'' + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y\, \partial y'^3}\, y''^2.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so erhält man:

$$0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x\, \partial y}$$

woraus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = F(x)$$

folgt. Diese Gleichung vertritt die Stelle der Gleichung (67), denn sie ist die unmittelbare Folge derselben. Setzen wir nun

$$\varphi\ (x, y) = E_0 + E_1\, y + E_2\, y^2 + E_3\, y^3 + E_4\, y^4 + \dots$$
$$\varphi_1\ (x, y) = F_0 + F_1\, y + F_2\, y^2 + F_3\, y^3 + F_4\, y^4 + \dots$$

unter $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4 \dots F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$ Functionen von x verstanden, so ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = E_1 + 2E_2\, y + 3E_3\, y^2 + 4E_4\, y^3 + \dots$$
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = F_0' + F_1'\, y + F_2'\, y^2 + F_3'\, y^3 + F_4'\, y^4 + \dots$$

und folglich:

$$E_1 - F_0' = F(x)$$
$$2\, E_2 = F_1'$$
$$3\, E_3 = F_2'$$
$$4\, E_4 = F_3'$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Es ist demnach:

$$V = E_0 + (F_0' + F(x))\,y + \frac{F_1'}{2}\,y^2 + \frac{F_2'}{3}\,y^3 + \frac{F_3'}{4}\,y^4 + \ldots$$
$$+ y'(F_0 + F_1\,y + F_2\,y^2 + F_3\,y^3 + F_4\,y^4 + \ldots) +$$
$$+ [\psi\,(x, y, y')]'$$

oder

$$V = E_0 + y\,F(x) + (F_0\,y + \frac{F_1}{2}\,y^2 + \frac{F_2}{3}\,y^3 + \frac{F_3}{4}\,y^4 + \ldots)' +$$
$$+ [\psi\,(x, y, y')]'$$

was sich auch in folgender Form niederschreiben lässt:

$$V = y\,F(x) + [\psi_1\,(x, y)]' + [\psi_2\,(x, y, y')]'$$

wo F, ψ_1, ψ_2 willkürliche Functionen bedeuten.

V lässt sich also jederzeit betrachten unter einer der vier folgenden Formen:

$$V = \varphi\,(x, y, y', y'')$$
$$V = \varphi\,(x, y, y') + y''\,\psi\,(x, y, y')$$
$$V = \varphi\,(x, y) + y'\,\psi\,(x, y) + [\chi\,(x, y, y')]'$$
$$V = y\,\varphi\,(x) + [\psi\,(x, y)]' + [\chi\,(x, y, y')]'.$$

Im ersten Falle, wo $V = \varphi\,(x, y, y', y'')$ und nicht zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = 0$ ist, wird die Differential-Gleichung, die zur Bestimmung von y dient, von der vierten Ordnung, die in dem Integrale der Differential-Gleichung eintretenden vier Constanten werden bestimmt, durch die den Grenzen x_1 und x_2 entsprechenden Werthe von y_1, y_2 und y_1', y_2', und die Glieder der zweiten Ordnung lassen sich auf folgende Form bringen:

$$\Big\{v\,w^2 + 2\,v_1\,w\,w' + v_2\,w'^2\Big\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 V}{\partial y''^2}\,(w'' + \lambda\,w' + \mu\,w)^2\,dx.$$

Im zweiten Falle, wo $V = \varphi\,(x, y, y') + y''\,\psi\,(x, y, y')$ und nicht zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''}\right)' = 0$ ist, wird die Differential-Gleichung, die zur Bestimmung von y dient, von der zweiten Ordnung; die in dem Integrale der Differential-Gleichung eintretenden zwei Constanten werden bestimmt, durch die den Abscissen x_1 und x_2

entsprechenden Ordinaten y_1 und y_2. Die Glieder zweiter Ordnung lassen sich in diesem Falle so transformiren:

$$\left\{ v\, w^2 + 2\, v_1\, w\, w' + v_2\, w'^2 \right\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - 2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} \right)' \right] (w' + \lambda\, w)^2\, dx.$$

Im dritten Falle, wo $V = \varphi(x, y) + y'\psi(x, y) + [\chi(x, y, y')]'$ und nicht zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''}\right)'' = 0$ ist, hat man zur Bestimmung von y eine ganz gewöhnliche Gleichung, und für die Glieder der zweiten Ordnung folgenden Ausdruck:

$$\left\{ v\, w^2 + 2\, v_1\, w\, w' + v_2\, w'^2 \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} \right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} \right)'' \right] w^2 dx.$$

Endlich im vierten Falle, wo $V = y\, \varphi(x) + [\psi(x, y)]' + [\chi(x, y, y')]'$ ist, gibt es gar keinen Werth für y, welcher

$$U = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ y\, \varphi(x) + [\psi(x, y)]' + [\chi(x, y, y')]' \right\} dx$$

zu einem Maximum oder Minimum macht, denn die Gleichung, welche zur Bestimmung von y dient, nämlich

$$\frac{dV}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial y''}\right)'' = 0$$

wird hier

$$\varphi(x) = 0$$

und daraus kann offenbar nicht y als Function von x bestimmt werden.

Wäre aber $\varphi(x)$ identisch Null, mit anderen Worten wäre

$$V = [\psi(x, y)]' + [\chi(x, y, y')]'$$

so hätte man $\int V dx = \psi(x, y) + \chi(x, y, y')$ und jener Werth von y, welcher

$$U = \psi(x, y) + \chi(x, y, y')$$

zu einem Maximum oder Minimum macht, ergäbe sich auf folgende Weise.

Man denke sich diese Function bereits gefunden; sie sei $y = f(x)$. Durch eine sehr kleine Veränderung dieser Function

nehme die sie repräsentirende Curve eine andere, von der früheren sehr wenig verschiedene Gestalt an, geht nämlich y über in $y + \delta y$, so geht dadurch y' über in $y' + \delta y'$ und U in U_1, dieses ist:

$$U_1 = U + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta y' + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 U}{\partial y'^2}\delta y'^2\right\} + \ldots$$

Nun hat man bekanntlich für ein Maximum oder Minimum:

$$\frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta y' = 0 \tag{69}$$

für ein Maximum zu gleicher Zeit noch

$$\frac{d^2 U}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 U}{\partial y'^2}\delta y'^2 < 0$$

und für ein Minimum

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 U}{\partial y'^2}\delta y'^2 > 0.$$

Sucht man jetzt aus der Differential-Gleichung

$$\frac{dU}{\partial y'} = 0,$$

welche im Allgemeinen von der ersten Ordnung ist, y als Function von x, setzt dann diesen Werth von y in

$$\frac{dU}{\partial y}\delta y \tag{70}$$

und wählt die in y auftretende Constante so, dass der Ausdruck (70) verschwindet, so ist der so gefundene Werth von y ein solcher, welcher die Gleichung (69) befriedigt. Am einfachsten ist es, die Constante durch die Bedingung zu bestimmen, dass für $x = x_1$, $y = y_1$ wird; die Gleichung (70) wird hierdurch befriedigt, weil in diesem Falle $\delta y = 0$ ist. Da die Glieder der zweiten Ordnung alsdann dem Ausdrucke: $\frac{\partial^2 U}{\partial y'^2}\delta y'^2$ gleich sind, so hat man ein Maximum oder Minimum je nachdem $\frac{\partial^2 U}{\partial y'^2}$ negativ oder positiv ist. Wäre $\frac{d^2 U}{\partial y'^2} = 0$, so müsste man, wie bekannt, die ferneren Glieder der Taylor'schen Reihe zu Rathe ziehen.

§. 16.

Ist

$$V = \varphi\,(x,\ y,\ y',\ y'',\ y'''),$$

so treten folgende specielle Fälle ein:

1. wenn $\frac{d^2 V}{\partial y'''^2} = 0$ ist,
2. wenn nebst dieser Gleichung noch folgende Gleichung stattfindet:

$$\frac{d^2 V}{\partial y''^2} - 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial y'''} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y''\,\partial y'''}\right)' = 0,$$

3. wenn nebst diesen beiden Gleichungen noch

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y''} + 3\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'''}\right)' - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial y''}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial y'''}\right)'' = 0$$

ist, und endlich

4. wenn nebst den drei hier angeführten Gleichungen noch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y''}\right)'' - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'''}\right)''' = 0$$

stattfindet.

Von der Analogie geleitet, schliessen wir auf folgende in diesen speciellen Fällen dem V der Reihe nach zukommenden Formen:

$$1.\quad V = \varphi\,(x,\ y,\ y',\ y'') + y'''\,\psi\,(x,\ y,\ y',\ y'')$$

$$2.\quad V = \varphi\,(x,\ y,\ y') + y''\,\psi\,(x,\ y,\ y') + [\chi\,(x,\ y,\ y',\ y'')]'$$

$$3.\quad V = \varphi\,(x,\ y) + y'\,\psi\,(x,\ y) + [\chi_1\,(x,\ y,\ y')]' + [\chi_2\,(x,\ y,\ y',\ y'')]'$$

$$4.\quad V = y\,\varphi\,(x) + [\chi_1\,(x, y)]' + [\chi_2(x, y, y')]' + [\chi_3(x, y, y'\, y'')]'.$$

An der Richtigkeit der ersten Form zweifeln wir keinen Augenblick, um uns aber von der Richtigkeit der zweiten zu überzeugen, bilden wir den Ausdruck

$$\frac{d^2 V}{\partial y''^2} - 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial y'''} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y''\partial y'''}\right)'.$$

Da

$$V = \varphi\,(x,\ y,\ y') + y''\,\psi\,(x,\ y,\ y') + [\chi\,(x,\ y,\ y',\ y'')]'$$

ist, so hat man:

$$\frac{d^2 V}{\partial y''^2} = \frac{\partial^3\chi}{\partial x\partial y''^2} + \frac{\partial^3\chi}{\partial y\partial y''^2}\, y' + 2\,\frac{\partial^2\chi}{\partial y'\partial y''} + \frac{\partial^3\chi}{\partial y'\partial y''^2}\, y'' + \frac{\partial^3\chi}{\partial y''^3}\, y'''$$

$$-2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial y'''} = -2\,\frac{\partial^2\chi}{\partial y'\partial y''}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y''\partial y'''}\right)' = -\frac{\partial^3\chi}{\partial x\partial y''^2} - \frac{\partial^3\chi}{\partial y\partial y''^2}\, y' - \frac{\partial^3\chi}{\partial y'\partial y''^2}\, y'' - \frac{\partial^3\chi}{\partial y''^3}\, y'''.$$

Die Summe dieser drei Ausdrücke ist Null, folglich erfüllt der aufgestellte Ausdruck für V die zu erfüllende Bedingung.

Überzeugen wir uns jetzt auch, ob für

$$V = \varphi(x, y) + y'\,\psi(x, y) + [\chi_1(x, y, y')]' + [\chi_2(x, y, y', y'')]'$$

der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y''} + 3\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y'''}\right)' - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial y''}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{dy'\partial y'''}\right)'' = 0$$

stattfindet. Man schreibe zu dem Behufe V so auf:

$$V = \varphi(x, y) + y'\,\psi(x, y) + [\chi(x, y, y', y'')]'$$

und hat dann:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = 2\,\frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial y'} + \frac{\partial^3\chi}{\partial x\partial y'^2} + \frac{\partial^3\chi}{\partial y\partial y'^2}\, y' + \frac{\partial^3\chi}{\partial y'^3}\, y'' + \frac{\partial^3\chi}{\partial y''\partial y'^2}\, y'''$$

$$-2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y''} = -2\left\{\frac{\partial^3\chi}{\partial x\partial y\partial y''} + \frac{\partial^3\chi}{\partial y^2\partial y''}\, y' + \frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial y'} + \frac{\partial^3\chi}{\partial y\partial y'\partial y''}\, y'' + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3\chi}{\partial y\partial y''^2}\, y'''\right\}$$

$$3\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'''}\right)' = 3\left\{\frac{\partial^3\chi}{\partial x\,\partial y\,\partial y''} + \frac{\partial^3\chi}{\partial y^1\,\partial y''}\, y' + \frac{\partial^3\chi}{\partial y\,\partial y'\,\partial y''}\, y'' + \frac{\partial^3\chi}{\partial y\,\partial y''^2}\, y'''\right\}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial y''}\right)' = -\left\{\frac{\partial^3\chi}{\partial x\,\partial y\,\partial y''} + \frac{\partial^3\chi}{\partial x\,\partial y'^2} + \frac{\partial^3\chi}{\partial y^2\,dy''}\, y' + \frac{\partial^3\chi}{\partial y\,\partial y'^2}\, y' + \right.$$
$$+ 2\,\frac{\partial^3\chi}{\partial y\,\partial y'\,\partial y''}\, y'' + \frac{\partial^3\chi}{\partial y'^3}\, y'' + \frac{\partial^3\chi}{\partial y\,\partial y''^2}\, y''' + 2\,\frac{\partial^3\chi}{\partial y'^2\,\partial y''}\, y''' +$$
$$+ \frac{\partial^3\chi}{\partial y'\,\partial y''^2}\, y'''' + \frac{\partial^4\chi}{\partial x^2\,\partial y'\,\partial y''} + 2\,\frac{\partial^4\chi}{\partial x\,\partial y\,\partial y'\,\partial y''}\, y' +$$
$$+ 2\,\frac{\partial^4\chi}{\partial x\,\partial y'^2\,\partial y''}\, y'' + 2\,\frac{\partial^4\chi}{\partial x\,\partial y'\,\partial y''^2}\, y''' + \frac{\partial^4\chi}{\partial y^2\partial y'\partial y''}\, y'^2 +$$
$$+ 2\,\frac{\partial^4\chi}{\partial y\,\partial y'^2\,\partial y''}\, y'\,y'' + 2\,\frac{\partial^4\chi}{\partial y\,\partial y'\,\partial y''^2}\, y'\,y''' +$$
$$\left. + \frac{\partial^4\chi}{\partial y'\,\partial y''}\, y''^2 + 2\,\frac{\partial^4\chi}{\partial y'^2\partial y''^2}\, y''\,y''' + \frac{\partial^4\chi}{\partial y'\partial y''^3}\, y'''^2\right\}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''}\right)'' = \frac{\partial^3 \chi}{\partial y\, \partial y'\, \partial y''} y'' + \frac{\partial^3 \chi}{\partial y'^2\, \partial y''} y''' + \frac{\partial^3 \chi}{\partial y'\, \partial y''^2} y'''' + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2\, \partial y'\, \partial y''} +$$

$$+ 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x\, \partial y\, \partial y'\, \partial y''} y' + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x\, \partial y'^2\, \partial y''} y'' + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x\, \partial y'\, \partial y''^2} y''' +$$

$$+ \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^2\, \partial y'\, \partial y''} y'^2 + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial y\, \partial y'^2\, \partial y''} y' y'' + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial y\, \partial y'\, \partial y''^2} y' y''' +$$

$$+ \frac{\partial^4 \chi}{\partial y'^3\, \partial y''} y''^2 + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial y'^2\, \partial y''^2} y'' y''' + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y'\, \partial y''^3} y'''^2.$$

Die Summe dieser fünf Ausdrücke ist wirklich Null.

Endlich hat man sich noch zu überzeugen, ob ein Ausdruck von der Form

$$V = y\varphi(x) + [\chi_1(x, y)]' + [\chi_2(x, y, y')]' + \\ + [\chi_3(x, y, y', y'')]',$$

den man kürzer auch so darstellen kann:

$$V = y\varphi(x) + [\chi(x, y, y', y'')]'$$

der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y''}\right)'' - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y'''}\right)''' = 0$$

genügt. — Da nun aber folgende Gleichungen stattfinden:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y'}\right)' = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)'\right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y''}\right)'' = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y''}\right)''\right]$$

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial y'''}\right)''' = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y'''}\right)'''\right]$$

von deren Identität man sich durch wirkliches Entwickeln derselben überzeugen kann; so erhält man durch Summiren derselben

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial y''}\right)'' - \left(\frac{\partial V}{\partial y'''}\right)'''\right]$$

und dieses besagt, dass der Ausdruck

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)'' - \left(\frac{\partial V}{\partial y'''}\right)'''$$

von y unabhängig ist. Das findet hier aber wirklich Statt, denn V besteht aus zwei Theilen, mit dem ersten Theile, nämlich $y\varphi(x)$ diese Operation durchgeführt, kommt man auf $\varphi(x)$; mit dem zweiten Theile, der das vollständige Differentiale von $\chi(x, y, y', y'')$ ist, diese Operation durchgeführt, kommt man zu Null, weil nach Euler bei einem vollständigen Differential einer Function von x, y, y', y'' der Ausdruck

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial y''}\right)'' - \left(\frac{\partial V}{\partial y'''}\right)''' = 0$$

ist.

In dem allgemeinen Falle, wo $V = \varphi(x, y, y', y'', y''')$ und nicht zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = 0$ ist, hat man zur Aufsuchung jenes Werthes von y, der $U = \int_{x_1}^{x_2} V dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht, eine Differential-Gleichung sechster Ordnung; die in dem Integrale eintretenden sechs Constanten werden bestimmt durch die den Grenzen x_1 und x_2 des Integrals entsprechenden Werthe von y_1, y_2; y_1', y_2', und y_1'', y_2''. Für die Glieder der zweiten Ordnung gewinnt man hier einen Ausdruck folgender Form:

$$\Big\{v w^2 + v_1 w'^2 + v_2 w''^2 + 2v_3 w w' + 2v_4 w w'' + 2v_5 w' w''\Big\}_{x_1}^{x_2} +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} (w''' + \lambda_1 w'' + \lambda_2 w' + \lambda_3 w)^2 dx.$$

In dem ersten speciellen Falle, wo man

$$V = \varphi(x, y, y', y'') + y'''\psi(x, y, y', y'')$$

und nicht zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} - 2\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''}\right)' = 0$ hat, ist die zur Bestimmung von y dienende Differential-Gleichung von der vierten Ordnung, die in y erscheinenden Constanten werden bestimmt, durch die den Grenzen x_1 und x_2 entsprechenden Werthe von y_1, y_2 und y'_1, y'_2. Die Glieder der zweiten Ordnung haben wir in diesem Falle auf folgende Form gebracht:

$$\Big\{v w^2 + v_1 w'^2 + v_2 w''^2 + 2v_3 w w' + 2v_4 w w'' + 2v_5 w' w''\Big\}_{x_1}^{x_2} +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} - 2\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''}\right)'\right] (w'' + \lambda w' + \mu w)^2 dx.$$

In dem zweiten speciellen Falle, wo

$$V = \varphi(x, y, y') + y''\psi(x, y, y') + [\chi(x, y, y', y'')]'$$

und nicht zugleich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} + 3\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''}\right)' - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''}\right)'' = 0$$

ist, hat man zur Bestimmung von y eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung und zur Bestimmung der Constanten die den Abscissen x_1 und x_2 entsprechenden Ordinaten y_1 und y_2. Es lassen sich da die Glieder der zweiten Ordnung so schreiben:

$$\left\{ v w^2 + v_1 w'^2 + v_2 w''^2 + 2v_3 w w' + 2v_4 w w'' + 2v_5 w' w'' \right\}_{x_1}^{x_2} +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} + 3\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''}\right)' - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''}\right)''\right](w' +$$
$$+ \lambda w)^2 \, dx.$$

Was den dritten speciellen Fall anbelangt, wo nämlich

$$V = \varphi(x, y) + y'\psi(x, y) + [\chi_1(x, y, y')]' + [\chi_2(x, y, y', y'')]'$$

ist, und nicht zugleich $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''}\right)'' - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''}\right)''' = 0;$ da erscheint für y eine ganz gewöhnliche Gleichung, und für die Glieder der zweiten Ordnung folgender Ausdruck:

$$\left\{ v w^2 + v_1 w'^2 + v_2 w''^2 + 2w_3 w w' + 2v_4 w w'' + 2v_5 w' w'' \right\}_{x_1}^{x_2} +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''}\right)'' - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''}\right)'''\right] w^2 dx;$$

endlich im letzten Falle, wo

$$V = y\varphi(x) + [\chi_1(x, y)]' + [\chi_2(x, y, y')' + [\chi_3(x, y, y', y'')]'$$

ist, gibt es gar keinen Werth für y, welcher $U = \int_{x_1}^{x_2} V dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht, denn die Gleichung, welche zur Bestimmung von y dient, nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial y''}\right)'' - \left(\frac{\partial V}{\partial y'''}\right)''' = 0$$

gibt hier

$$\varphi(x) = o$$

woraus sich y nicht bestimmen lässt, aus dem höchst einfachen Grunde, weil es in der Gleichung gar nicht erscheint.

Wäre aber $\varphi(x)$ identisch Null, d. h. wäre

$$V = [\chi_1(x, y)]' + [\chi_2(x, y, y')]' + [\chi_3(x, y, y', y'')]',$$

so hätte man

$$\int V dx = \chi_1(x, y) + \chi_2(x, y, y') + \chi_3(x, y, y', y'')$$

und jenen Werth von y, welchen

$$U = \chi_1(x, y) + \chi_2(x, y, y') + \chi_3(x, y, y', y'')$$

zu einem Maximum oder Minimum macht, ergibt sich aus der Gleichung

$$(71) \qquad \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial U}{\partial y''} \delta y'' = 0$$

die sich auf dieselbe Weise, wie die Gleichung (69) ableiten lässt. Um ihr zu genügen, setze man

$$\frac{\partial U}{\partial y''} = 0,$$

suche aus dieser Gleichung, die im Allgemeinen eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung ist, y als Function von x, und wähle nun die in y auftretenden Constanten so, dass

$$(72) \qquad \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial y'} \delta y' = 0$$

wird. Am einfachsten wird das erzweckt werden, wenn man die Constanten durch die Bedingungen bestimmt, dass für $x = x_1$, $y = y_1$ und $y' = y_1'$ wird, denn alsdann wird $\delta y = 0$ und $\delta y' = 0$ sein. Für die Glieder zweiter Ordnung hat man dann: $\frac{\partial^2 U}{\partial y''^2} \delta y''^2$; ist dieses negativ oder positiv, so hat man respective ein Maximum oder Minimum. Wir übergehen die Fälle, wo $\frac{\partial^2 U}{\partial y''^2} = 0$ ist, oder wo die Gleichung $\frac{\partial U}{\partial y''} = 0$ auf eine Differential-Gleichung erster oder nullter Ordnung führt mit Stillschweigen, weil sie weder hinreichendes Interesse, noch Schwierigkeiten darbieten.

§. 17.

Wir gehen nun zu dem Probleme der Variationsrechnung über, wo wieder

$$U = \int_{x_1}^{x_2} V dx$$

ist, V aber eine Function von

$$x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}, z, z', z'' \ldots z^{(m)}$$

und suchen jetzt für y und z solche Functionen von x, welche U zu einem Maximum oder Minimum machen.

Die Lösung dieses Problems führt zu Rechnungen, welche die grösste Analogie haben, mit den von uns bis jetzt geführten, wir wollen trachten, diese Analogie ins hellste Licht zu setzen. — Denken wir uns also y und z bereits gefunden, und zwar sei $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$. Durch eine sehr kleine Veränderung dieser Functionen nehme die sie repräsentirende Curve eine andere, von der früheren sehr wenig verschiedene Gestalt an; gehe nämlich y über in $y + \delta y$, z in $z + \delta z$, wo δy und δz sehr kleine von x abhängige Grössen vorstellen, so gehen dadurch

y' über in $y' + \delta y'$	z' über in $z' + \delta z'$
y'' „ „ $y'' + \delta y''$	z'' „ „ $z'' + \delta z''$
. . . .	. . . .
$y^{(n)}$ über in $y^{(n)} + \delta y^{(n)}$	$z^{(m)}$ über in $z^{(m)} + \delta z^{(m)}$

und U in U_1, V in V_1.

Entwickelt man nun V_1 nach der Taylor'schen Reihe, so hat man:

$$V_1 = V + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} +$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial z}\delta z + \frac{\partial V}{\partial z'}\delta z' + \frac{\partial V}{\partial z''}\delta z'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z^{(m)}}\delta z^{(m)} + R$$

wo R der Kürze halber statt der zweiten und höheren Ordnung der Taylor'schen Reihe gesetzt ist. Es ist daher:

$$U_1 = \int_{x_1}^{x_2} V dx + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} \right\} dx +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial z}\delta z + \frac{\partial V}{\partial z'}\delta z' + \frac{\partial V}{\partial z''}\delta z'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z^{(m)}}\delta z^{(m)} \right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} R dx$$

oder

$$U_1 - U = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''} \delta y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(m)}} \delta y^{(m)} \right\} dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} \delta z + \frac{\partial V}{\partial z'} \delta z' + \frac{\partial V}{\partial z''} \delta z'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z^{(m)}} \delta z^{(m)} \right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} R dx.$$

Dieser Ausdruck soll nun, im Falle des Maximums stets negativ und im Falle des Minimums stets positiv bleiben, wie immer auch δy und δz beschaffen sind. Denkt man sich nun $\delta y = \varepsilon \varphi_1(x)$ und $\delta y = \varepsilon \psi_1(x)$ gesetzt, unter ε eine sehr kleine constante Zahl verstanden, so lässt sich $U_1 - U$ folgendermassen darstellen:

$$U_1 - U = A\varepsilon + B\varepsilon^2 + C\varepsilon^3 + \ldots$$

wo

$$A\varepsilon = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''} \delta y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right\} dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} \delta z + \frac{\partial V}{\partial z'} \delta z' + \frac{\partial V}{\partial z''} \delta z'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z^{(m)}} \delta z^{(m)} \right\} dx$$

ist, $B\varepsilon^2$ die Glieder der zweiten Ordnung, $C\varepsilon^3$ die Glieder der dritten Ordnung bezeichnet u. s. f., und man hat bekanntlich für ein Maximum oder Minimum

$$A = 0,$$

für ein Maximum zu gleicher Zeit noch

$$B < 0$$

und für ein Minimum

$$B > 0.$$

Wir haben also als Bedingungs-Gleichung für ein Maximum oder Minimum

$$(73) \quad \begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''} \delta y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right\} dx + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} \delta z + \frac{\partial V}{\partial z'} \delta z' + \frac{\partial V}{\partial z''} \delta z'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z^{(m)}} \delta z^{(m)} \right\} dx = 0 \end{aligned}$$

Behandeln wir nun, so wie in unserem ersten Memoire die einzelnen Glieder dieses Ausdruckes nach der Methode des theilweisen Integrirens, so haben wir:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2} \partial y \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial y''}\right)'' - \ldots + (-1)^n \left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)} \right\} dx + \\
&+ \int_{x_1}^{x_2} \partial z \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} - \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial z''}\right)'' - \ldots + (-1)^m \left(\frac{\partial V}{\partial z^{(m)}}\right)^{(m)} \right\} dx + \\
&+ \left\{ \partial y \left[\frac{\partial V}{\partial y'} - \left(\frac{\partial V}{\partial y''}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial y'''}\right)'' - \ldots + (-1)^{n-1} \left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n-1)} \right] \right\}_{x_1}^{x_2} + \\
&+ \left\{ \partial z \left[\frac{\partial V}{\partial z'} - \left(\frac{\partial V}{\partial z''}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial z'''}\right)'' - \ldots + (-1)^{m-1} \left(\frac{\partial V}{\partial z^{(m)}}\right)^{(m-1)} \right] \right\}_{x_1}^{x_2} + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left\{ \partial y^{(n-1)} \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \right\}_{x_1}^{x_2} + \left\{ \partial z^{(m-1)} \frac{\partial V}{\partial z^{(m)}} \right\}_{x_1}^{x_2} = 0
\end{aligned} \tag{74}$$

für die Bedingungs-Gleichung des Grössten oder Kleinsten.

Sucht man nun aus den beiden Differential-Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial y''}\right)'' - \ldots + (-1)^n \left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)} = 0 \\
&\frac{\partial V}{\partial z} - \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial z''}\right)'' - \ldots + (-1)^m \left(\frac{\partial V}{\partial z^{(m)}}\right)^{(m)} = 0
\end{aligned} \tag{75}$$

y und z als Functionen von x, setzt dann die gefundenen Werthe in

$$\begin{aligned}
&\left\{ \partial y \left[\frac{\partial V}{\partial y'} - \left(\frac{\partial V}{\partial y''}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial y'''}\right)'' - \ldots + (-1)^{n-1} \left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n-1)} \right] \right\}_{x_1}^{x_2} + \\
&+ \left\{ \partial z \left[\frac{\partial V}{\partial z'} - \left(\frac{\partial V}{\partial z''}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial z'''}\right)'' - \ldots + (-1)^{m-1} \left(\frac{\partial V}{\partial z^{(m)}}\right)^{(m-1)} \right] \right\}_{x_1}^{x_2} + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left\{ \partial y^{(n-1)} \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \right\}_{x_1}^{x_2} + \left\{ \partial z^{(m-1)} \frac{\partial V}{\partial z^{(m)}} \right\}_{x_1}^{x_2}
\end{aligned} \tag{76}$$

und wählt man die in y und z auftretenden Constanten so, dass der Ausdruck (76) verschwindet, so sind die so gefundenen Werthe

von y und z solche, welche die Gleichung (74), und somit auch die Gleichung (73) befriedigen. Ob aber diese Werthe von y und z das U wirklich zu einem Maximum oder Minimum macht, muss erst weiter untersucht werden.

§. 18.

Betrachten wir nun die Glieder der zweiten Ordnung der Taylor'schen Reihe. Setzt man der Kürze halber

$$\delta y = w,\ \delta y' = w',\ \delta y'' = w'',\ \ldots$$
$$\delta z = u,\ \delta z' = u',\ \delta z'' = u''.\ \ldots$$

ferner

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(r)}\, dy^{(s)}} = (y^{(r)}, y^{(s)}),\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(r)}\, dz^{(s)}} = (y^{(r)}, z^{(s)}),\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^{(r)}\, \partial z^{(s)}} = (z^{(r)}, z^{(s)})$$

so lassen sich die unter dem Integralzeichen stehenden Glieder so ordnen:

$$\begin{aligned}
& w\,[(y\,y)\,w + (y\,y')\,w' + \ldots + (y\,y^{(n)})\,w^{(n)} + \\
& \quad + (y\,z)\,u + (y\,z')\,u' + \ldots + (y\,z^{(m)})\,u^{(m)}] + \\
& + w'\,[(y'\,y)\,w + (y'y')\,w' + \ldots + (y'\,y^{(n)})\,w^{(n)} + \\
& \quad + (y'z)\,u + (y'z')\,u' + \ldots + (y'z^{(m)})\,u^{(m)}] + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + w^{(n)}\,[(y^{(n)}\,y)\,w + (y^{(n)}\,y')w' + \ldots + (y^{(n)}\ y^{(n)})\,w^{(n)} + \\
& \quad + (y^{(n)}\,z)\,u + (y^{(n)}\,z')\,u' + \ldots + (y^{(n)}\,z^{(m)})\,u^{(m)}] + \\
& + u\,[(z\,y)\,w + (z\,y')\,w' + \ldots + (z\,y^{(n)})\,w^{(n)} + \\
& \quad + (z\,z)\,u + (z\,z')\,u' + \ldots + (z\,z^{(m)})\,u^{(m)}] + \\
& + u'\,[(z'\,y)\,w + (z'\,y')\,w' + \ldots + (z'\,y^{(n)})\,w^{(n)} + \\
& \quad + (z'\,z)\,u + (z'\,z')\,u' + \ldots + (z'\,z^{(m)})\,u^{(m)}] + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + u^{(m)}\,[(z^{(m)}\,y)\,w + (z^{(m)}y')\,w' + \ldots + (z^{(m)}\ y^{(n)})\,w^{(n)} + \\
& \quad + (z^{(m)}z)\,u + (z^{(m)}z')\,u' + \ldots + (z^{(m)}\,z^{(m)})\,u^{(m)}].
\end{aligned}$$

Setzt man nun wieder der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
& (r\,y)\,w + (r\,y')\,w' + \ldots + (r\,y^{(n)})\,w^{(n)} + \\
& (r\,z)\,u + (r\,z')\,u' + \ldots + (r\,z^{(m)})\,u^{(m)} = M_r
\end{aligned}$$

so hat man für die Glieder der zweiten Ordnung:

$$\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\Big\{w\,M_y + w'\,M_{y'} + \ldots + w^{(n)}\,M_{y^{(n)}} + u\,M_u + u'\,M_{u'} + \ldots + u^{(m)}\,M_{u^{(m)}}\Big\}\,dx$$

Führt man nun folgende Bezeichnungsweise ein:

$$\frac{\partial V}{\partial y} w + \frac{\partial V}{\partial y'} w' + \frac{\partial V}{\partial y''} w'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} w^{(n)} +$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial z} u + \frac{\partial V}{\partial z'} u' + \frac{\partial V}{\partial z''} u'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z^{(m)}} u^{(m)} = W$$

so hat man:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = M_y, \ \frac{\partial W}{\partial y'} = M_{y'}, \ \frac{\partial W}{\partial y''} = M_{y''} \ldots \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}} = M_y^{(n)}$$
$$\frac{\partial W}{\partial z} = M_z, \ \frac{\partial W}{\partial z'} = M_{z'}, \ \frac{\partial W}{\partial z''} = M_{z''} \ldots \frac{W}{\partial z^{(m)}} = M_z^{(m)}$$

und folglich ist:

$$U_1 - U = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} w + \frac{\partial V}{\partial y'} w' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} w^{(n)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial V}{\partial z} u + \frac{\partial V}{\partial z'} u' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z^{(m)}} u^{(m)} \right\} dx +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} w + \frac{\partial W}{\partial y'} w' + \ldots + \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}} w^{(n)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial W}{\partial z} u + \frac{\partial W}{\partial z'} u' + \ldots + \frac{\partial W}{\partial z^{(m)}} u^{(m)} \right\} dx$$

So wie wir nun die Glieder der ersten Ordnung mittelst des theilweisen Integrirens umwandelten, genau so lassen sich auch die Glieder der zweiten Ordnung umwandeln, man hat nämlich für dieselben:

$$\int_{x_1}^{x_2} \partial y \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} - \left(\frac{\partial W}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial W}{\partial y''}\right)'' - \ldots + (-1)^n \left(\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)} \right\} \partial x +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \partial z \left\{ \frac{\partial W}{\partial z} - \left(\frac{\partial W}{\partial z'}\right)' + \left(\frac{\partial W}{\partial z''}\right)'' - \ldots + (-1)^m \left(\frac{\partial W}{\partial z^{(m)}}\right)^{(m)} \right\} \partial z +$$
$$+ \left\{ \partial y \left[\frac{\partial W}{\partial y'} - \left(\frac{\partial W}{\partial y''}\right)' + \left(\frac{\partial W}{\partial y'''}\right)'' - \ldots + (-1)^{n-1} \left(\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n-1)} \right] \right\}_{x_1}^{x_2} +$$
$$+ \left\{ \partial z \left[\frac{\partial W}{\partial z'} - \left(\frac{\partial W}{\partial z''}\right)' + \left(\frac{\partial W}{\partial z'''}\right)'' - \ldots + (-1)^{m-1} \left(\frac{\partial W}{\partial z^{(m)}}\right)^{(m-1)} \right] \right\}_{x_1}^{x_2} +$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ \left\{ \partial y^{(n-1)} \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}} \right\}_{x_1}^{x_2} + \left\{ \partial z^{(m-1)} \frac{d W}{\partial z^{(m)}} \right\}_{x_1}^{x_2}$$

und dies muss stets sein Zeichen beibehalten, wenn U ein Maximum oder Minimum sein soll.

§. 19.

Die Glieder der zweiten Ordnung lassen sich noch auf eine andere Weise transformiren, die analog ist, der von Legendre gezeigten [1]); wir wollen diese Transformation in zwei speciellen Fällen bewerkstelligen, nämlich wenn $V=\varphi(x, y, y', z, z')$ und wenn $V=\varphi(x, y, y', y'', z, z', z'')$ ist.

Im ersten Falle setze man

$$
(77)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} u^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} u'^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'} ww' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} wu + \\
&+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z'} wu' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial z} w'u + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial z'} w'u' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial z'} uu' = \\
&= (vw^2 + 2v_1 wu + v_2 u^2)' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}(w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2 + \\
&+ \mathrm{L}\,(u' + \mu_1 w + \mu_2 u)^2
\end{aligned}
$$

und bestimme $v, v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ so, dass dieser Gleichung identisch Genüge geschieht.

Führen wir zuerst der Bequemlichkeit halber folgende Abkürzungen ein:

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = A,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = B,\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = C,\ \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} = D,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'} = E,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} = F,
$$

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial y\,dz'} = G,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial z} = H,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial z'} = I,\ \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial z'} = K
$$

und entwickeln dann den zweiten Theil der Gleichung (77), so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&w^2(v' + B\lambda_1^2 + \mathrm{L}\mu_1^2) + w'^2 B + u^2(v_2' + B\lambda_3^2 + \mathrm{L}\mu_2^2) + \\
&+ u'^2(B\lambda_2^2 + \mathrm{L}) + 2ww'(v + B\lambda_1) + 2wu(v'_1 + B\lambda_1\lambda_3 + \\
&+ \mathrm{L}\mu_1\mu_2) + 2wu'(v_1 + B\lambda_1\lambda_2 + \mathrm{L}\mu_1) + 2w'u(v_1 + \\
&+ B\lambda_3) + 2w'u'B\lambda_2 + 2uu'(v_2 + B\lambda_2\lambda_3 + L\mu_2).
\end{aligned}
$$

Durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem ersten Theil der Gleichung (77) wird man zu folgenden Relationen geführt:

---

[1]) Man sehe hierüber die Abhandlung von Mainardi im 3. Bande von Tortolini's Journal für Mathematik.

$$
\begin{aligned}
A &= v' + B\lambda_1^2 + L\mu_1^2 \\
C &= v_2' + B\lambda_3^2 + L\mu_2^2 \\
D &= B\lambda_2^2 + L \\
E &= v + B\lambda_1 \\
F &= v_1' + B\lambda_1\lambda_3 + L\mu_1\mu_2 \\
G &= v_1 + B\lambda_1\lambda_2 + L\mu_1 \\
H &= v_1 + B\lambda_3 \\
I &= B\lambda_2 \\
K &= v_2 + B\lambda_2\lambda_3 + L\mu_2.
\end{aligned}
$$

Aus diesen ergeben sich unmittelbar folgende Werthe für λ_2 und L

$$
\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{I}{B} \\
L &= \frac{BD - I^2}{B}
\end{aligned}
\tag{78}
$$

und werden dieselben in die obigen Gleichungen eingeführt, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
A &= v' + B\lambda_1^2 + \frac{BD - I^2}{B}\mu_1^2 \\
C &= v'_2 + B\lambda_3^2 + \frac{BD - I^2}{B}\mu_2^2 \\
E &= v + B\lambda_1 \\
F &= v_1' + B\lambda_1\lambda_3 + \frac{BD - I^2}{B}\mu_1\mu_2 \\
G &= v_1 + I\lambda_1 + \frac{BD - I^2}{B}\mu_1 \\
H &= v_1 + B\lambda_3 \\
K &= v_2 + I\lambda_3 + \frac{BD - I^2}{B}\mu_2.
\end{aligned}
\tag{79}
$$

Diese sieben Gleichungen sind hinreichend zur Bestimmung der in ihnen vorkommenden sieben Unbekannten v, v_1, v_2, λ_1, λ_3, μ_1, μ_2.

Im zweiten Falle, wo $V = \varphi(x, y, y' y'', z, z', z'')$ ist, setze man:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} w''^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} u^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} u'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z''^2} u''^2 + \\
&+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'} ww' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y''} ww'' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} wu + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z'} wu' + \\
&+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z''} wu'' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial y''} w'w'' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial z} w'u + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial z'} w'u' +
\end{aligned}
\tag{80}
$$

$$+2\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial z''}w'u''+2\frac{\partial^2 V}{\partial y''\partial z}w''u+2\frac{\partial^2 V}{\partial y''\partial z'}w''u'+2\frac{\partial^2 V}{\partial y''\partial z''}w''u''+$$

$$+2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial z'}uu'+2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial z''}uu''+2\frac{\partial^2 V}{\partial z'\,\partial z''}u'u''=$$

$$=(v w^2+v_1 w'^2+v_2 u^2+v_3 u'^2+2v_4 w w'+2v_5 w u+2v_6 w u'+$$

$$+2v_7 w' u+2v_8 w' u'+2v_9 u u')'+\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}(w''+\lambda_1 w'+\lambda_2 w+$$

$$+\lambda_3 u''+\lambda_4 u'+\lambda_5 u)^2+\mathrm{L}(u''+\mu_1 w'+\mu_2 w+\mu_3 u'+\mu_4 u)^2$$

und bestimme $v, v_1, v_2, \ldots v_9$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$. $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ so, dass dieser Gleichung identisch Genüge geschieht.

Führen wir nun wieder folgende Abkürzungen ein:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=A,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}=B,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}=C,\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=D,\ \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2}=E,\ \frac{\partial^2 V}{\partial z''^2}=F,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y'}=G,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y''}=H,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}=I,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z'}=K,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z''}=L,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial y''}=M,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial z}=N,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial z'}=O,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial z''}=P,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y''\,\partial z}=Q,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y''\,\partial z'}=R,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y''\,\partial z''}=S,\ \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial z'}=T,\ \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial z''}=U,\ \frac{\partial^2 V}{\partial z'\,\partial z''}=V,$$

so haben wir, wenn wir den zweiten Theil der Gleichung (80) entwickeln und ordnen, Folgendes:

$$w^2(v'+C\lambda_2^2+\mathrm{L}\mu_2^2)+w'^2(v_1'+2v_4+C\lambda_1^2+\mathrm{L}\mu_1^2)+$$
$$+Cw''^2+u^2(v_2'+C\lambda_5^2+\mathrm{L}\mu_4^2)+u'^2(v_3'+2v_9+$$
$$+C\lambda_4^2+\mathrm{L}\mu_3^2)+u''^2(C\lambda_3^2+\mathrm{L})+2ww'(v+v_4'+$$
$$+C\lambda_1\lambda_2+\mathrm{L}\mu_1\mu_2)+2ww''(v_4+C\lambda_2)+2wu(v_5'+$$
$$+C\lambda_2\lambda_5+\mathrm{L}\mu_2\mu_4)+2wu'(v_5+v_6'+C\lambda_2\lambda_4+$$
$$+\mathrm{L}\mu_2\mu_3)+2wu''(v_6+C\lambda_2\lambda_3+\mathrm{L}\mu_2)+2w'w''(v_1+$$
$$+C\lambda_1)+2w'u(v_5+v_7'+C\lambda_1\lambda_5+\mathrm{L}\mu_1\mu_4)+$$
$$+2w'u'(v_6+v_7+v_8'+C\lambda_1\lambda_4+\mathrm{L}\mu_1\mu_3)+$$
$$+2w'u''(v_8+C\lambda_1\lambda_3+\mathrm{L}\mu_1)+2w''u(v_7+C\lambda_5)+$$
$$+2w''u'(v_8+C\lambda_4)+2C\lambda_3u''w''+2uu'(v_2+$$
$$+v_9'+C\lambda_4\lambda_5+\mathrm{L}\mu_3\mu_4)+2uu''(v_9+C\lambda_3\lambda_5+$$
$$+\mathrm{L}\mu_4)+2u'u''(v_3+C\lambda_3\lambda_4+\mathrm{L}\mu_3).$$

Damit nun (80) identisch werde, müssen folgende Gleichungen stattfinden:

$$
\begin{aligned}
A &= v' + C\lambda_2^2 + \mathrm{L}\mu_2^2 \\
B &= v_1' + 2v_4 + C\lambda_1^2 + \mathrm{L}\mu_1^2 \\
D &= v_2' + C\lambda_5^2 + \mathrm{L}\mu_4^2 \\
E &= v_3' + 2v_9 + C\lambda_4^2 + \mathrm{L}\mu_3^2 \\
F &= C\lambda_3^2 + \mathrm{L} \\
G &= v + v_4' + C\lambda_1\lambda_2 + \mathrm{L}\mu_1\mu_2 \\
H &= v_4 + C\lambda_2 \\
I &= v_5' + C\lambda_2\lambda_5 + \mathrm{L}\mu_2\mu_4 \\
K &= v_5 + v_6' + C\lambda_2\lambda_4 + \mathrm{L}\mu_2\mu_3 \\
L &= v_6 + C\lambda_2\lambda_3 + \mathrm{L}\mu_2 \\
M &= v_1 + C\lambda_1 \\
N &= v_5 + v_7' + C\lambda_1\lambda_5 + \mathrm{L}\mu_1\mu_4 \\
O &= v_6 + v_7 + v_8' + C\lambda_1\lambda_4 + \mathrm{L}\mu_1\mu_3 \\
P &= v_8 + C\lambda_1\lambda_3 + \mathrm{L}\mu_1 \\
Q &= v_7 + C\lambda_5 \\
R &= v_8 + C\lambda_4 \\
S &= C\lambda_3 \\
T &= v_2 + v_9' + C\lambda_4\lambda_5 + \mathrm{L}\mu_3\mu_4 \\
U &= v_9 + C\lambda_3\lambda_5 + \mathrm{L}\mu_4 \\
V &= v_3 + C\lambda_3\lambda_4 + \mathrm{L}\mu_3.
\end{aligned}
$$

Aus ihnen ergeben sich unmittelbar die Werthe von λ_3 und L; es ist nämlich

$$
\lambda_3 = \frac{S}{C} \qquad \mathrm{L} = \frac{CF-S^2}{C} \tag{81}
$$

und diese in den obigen Gleichungen eingeführt, geben:

$$
\begin{aligned}
A &= v' + C\lambda_2^2 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_2^2 \\
B &= v_1' + 2v_4 + C\lambda_1^2 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_1^2 \\
D &= v_2' + C\lambda_5^2 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_4^2 \\
E &= v_3' + 2v_9 + C\lambda_4^2 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_3^2 \\
G &= v + v'_4 + C\lambda_1\lambda_2 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_1\mu_2
\end{aligned} \tag{82}
$$

$$(82)\quad \begin{aligned}
H &= v_4 + C\lambda \\
I &= v_5' + C\lambda_2\lambda_5 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_2\mu_4 \\
K &= v_5 + v_6' + C\lambda_2\lambda_4 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_2\mu_3 \\
L &= v_6 + \lambda_2 S + \frac{CF-S^2}{C}\mu_2 \\
M &= v_1 + C\lambda_1 \\
N &= v_5 + v_7' + C\lambda_1\lambda_5 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_1\mu_4 \\
O &= v_6 + v_7 + v_8' + C\lambda_1\lambda_4 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_1\mu_3 \\
P &= v_8 + S\lambda_1 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_1 \\
Q &= v_7 + C\lambda_5 \\
R &= v_8 + C\lambda_4 \\
T &= v_2 + v_9' + C\lambda_4\lambda_5 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_3\mu_4 \\
U &= v_9 + S\lambda_5 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_4 \\
V &= v_3 + S\lambda_4 + \frac{CF-S^2}{C}\mu_3.
\end{aligned}$$

Diese 18 Gleichungen sind hinreichend zur Bestimmung von den in ihnen vorkommenden 18 Unbekannten.

Man kann nun auf ganz ähnliche Weise verfahren, wenn in V auch noch y''' und z''' oder noch y'''' und z'''' u. s. f. vorkommen. In gewissen speciellen Fällen, die wir später Gelegenheit haben werden ausführlicher zu betrachten, sind wir jedoch genöthigt, die Glieder zweiter Ordnung anders zu transformiren.

§. 20.

Ich will nun hier den in §. 5 bewiesenen Lehrsatz verallgemeinern. Es seien

$$(83)\quad \begin{aligned}
\varphi\,(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)} z, z', z'' \ldots z^{(m)}) &= 0 \\
\psi\,(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)} z, z', z'' \ldots z^{(m)}) &= 0
\end{aligned}$$

zwei Differential-Gleichungen, deren Integrale wir als bekannt voraussetzen. Sie seien

$$(84)\quad \begin{aligned}
y &= \eta\,(x, a_1, a_2, a_3 \ldots) \\
z &= \zeta\,(x, a_1, a_2, a_3 \ldots)
\end{aligned}$$

Denkt man sich diese Werthe in (83) eingeführt, so erhält man identische Gleichungen; differenzirt man dieselben nach irgend einem a, so erhält man

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n)}}\frac{\partial y^{(n)}}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial a} + \dots \\
&\qquad + \frac{\partial \varphi}{\partial z^{(m)}} \cdot \frac{\partial z^{(m)}}{\partial a} = 0 \\
&\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y^{(n)}}\frac{\partial y^{(n)}}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial a} + \dots \\
&\qquad + \frac{\partial \psi}{\partial z^{(m)}} \cdot \frac{\partial z^{(m)}}{\partial a} = 0
\end{aligned}
\tag{85}
$$

und diese Gleichungen sind offenbar wieder identische Gleichungen.

Setzt man

$$\frac{\partial y}{\partial a} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial a} = q$$

so ist:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial y'}{\partial a} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial y''}{\partial a} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial y'''}{\partial a} = \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}, \dots \\
&\frac{\partial z'}{\partial a} = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial z''}{\partial a} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial z'''}{\partial a} = \frac{\partial^3 q}{\partial x^3}, \dots
\end{aligned}
$$

und die Gleichungen (85) gehen über in

$$
\begin{aligned}
&\frac{d \varphi}{\partial y} p + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} p' + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n)}} p^{(n)} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} q' + \dots \\
&\qquad + \frac{\partial \varphi}{\partial z^{(m)}} q^{(m)} = 0 \\
&\frac{\partial \psi}{\partial y} p + \frac{\partial \psi}{\partial y'} p' + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y^{(n)}} p^{(n)} + \frac{\partial \psi}{\partial z} q + \frac{\partial \psi}{\partial z'} q' + \dots \\
&\qquad + \frac{\partial \psi}{\partial z^{(m)}} q^{(m)} = 0.
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Das sind, wie man sieht, lineare Differential-Gleichungen, denen genügt wird für

$$p = \frac{\partial y}{\partial a_1}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial a_1}$$

oder auch für

$$p = \frac{\partial y}{\partial a_2}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial a_2}$$

oder auch für

$$p = \frac{\partial y}{\partial a_3}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial a_3}$$

u. s. f. Man hat folglich für die vollständigen Integrale der zwei Differential-Gleichungen (86)

$$p = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots$$

$$q = A_1 \frac{\partial z}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial z}{\partial a_3} + \ldots$$

Kennt man daher die Integrale der Gleichungen (83), so kennt man auch die Integrale der Gleichungen (86), vorausgesetzt, dass man in (86) für y und z die gefundenen in (84) angegebenen Werthe substituirt hat.

Betrachten wir nun folgende zwei Systeme von Gleichungen:

$$(75) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{d y''}\right)'' - \ldots + (-1)^n \left(\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} - \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial z''}\right)'' - \ldots + (-1)^m \left(\frac{\partial V}{d z^{(m)}}\right)^{(m)} = 0 \end{cases}$$

$$(87) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{d y} - \left(\frac{\partial W}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial W}{\partial y''}\right)'' - \ldots + (-1)^n \left(\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right)^{(n)} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial z} - \left(\frac{\partial W}{\partial z'}\right)' + \left(\frac{\partial W}{\partial z''}\right)'' - \ldots + (-1)^m \left(\frac{\partial W}{\partial z^{(m)}}\right)^{(m)} = 0, \end{cases}$$

welche, da

$$W = \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z + \frac{\partial V}{\partial z'} \delta z' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z^{(m)}} \delta z^{(m)}$$

ist, in demselben analytischen Zusammenhange stehen, wie die Gleichungen (83) und (86), so hat man, wenn die Integrale der Gleichungen (75)

$$y = \eta\,(x,\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots)$$
$$z = \zeta\,(x,\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots)$$

sind, für die Integrale der Gleichungen (87)

$$\delta y = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots$$

$$\delta z = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial z}{\partial a_3} + \ldots$$

unter A_1, A_2, A_3 ... willkürliche Constante verstanden.

§. 21.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns an die ausführliche Untersuchung des speciellen Falles, wenn

$$V = \varphi\,(x, y, y', z, z')$$

ist.

Die Glieder der zweiten Ordnung lassen sich auf folgende drei verschiedene Weisen darstellen:

$$\int_{x_1}^{x_2}(Aw^2 + Bw'^2 + Cu^2 + Du'^2 + 2Eww' + 2Fwu + 2Gwu + 2Hw'u + 2Jw'u' + 2Kuu')\,dx \tag{88}$$

$$\left\{w\frac{dW}{dy'} + u\frac{\partial W}{\partial z'}\right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left\{w\left[\frac{\partial W}{\partial y} - \left(\frac{\partial W}{\partial y'}\right)'\right] + u\left[\frac{\partial W}{\partial z} - \left(\frac{\partial W}{\partial z'}\right)'\right]\right\}dx \tag{89}$$

$$\left\{vw^2 + 2v_1wu + v_2u^2\right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} B(w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2\,dx + \int_{x_1}^{x_2} L\,(u' + \mu_1 w + \mu_2 u)^2\,dx \tag{90}$$

die mit einander identisch sind. Die in (89) vorkommende Grösse W ist gleich:

$$W = \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\,\delta y' + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial V}{\partial z'}\,\delta z'$$

und die in (90) vorkommenden Grössen v, v_1, v_2, λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2 L haben zu genügen, folgenden Gleichungen:

$$\lambda_2 = \frac{I}{B} \qquad L = \frac{BD - I^2}{B} \tag{78}$$

$$\begin{aligned}
A &= v' + B\lambda_1^2 + \frac{BD-I^2}{B}\mu_1^2\\
C &= v_2' + B\lambda_3^2 + \frac{BD-I^2}{B}\mu_2^2\\
E &= v + B\lambda_1\\
F &= v_1' + B\lambda_1\lambda_3 + \frac{BD-I^2}{B}\mu_1\mu_2\\
G &= v_1 + I\lambda_1 + \frac{BD-I^2}{B}\mu_1\\
H &= v_1 + B\lambda_3\\
K &= v_2 + I\lambda_3 + \frac{BD-I^2}{B}\mu_2
\end{aligned} \tag{79}$$

Aus den Gleichungen (79) folgen:

$$\lambda_1 = \frac{E-v}{B}$$
$$\lambda_3 = \frac{H-v_1}{B}$$
$$\mu_1 = \frac{B\,(G-v_1) - I\,(E-v)}{B\,D-I^2}$$
$$\mu_2 = \frac{B\,(K-v_2) - I\,(H-v_1)}{B\,D-I^2}$$

$$(91)\quad \begin{aligned} &(B\,D - I^2)\,(v' - A) + D\,(E - v)^2 + B\,(G - v_1)^2 - \\ &\quad - 2I\,(G - v_1)\,(E - v) = 0 \\ &(B\,D - I^2)\,(v_2' - C) + D\,(H - v_1)^2 + B\,(K - v_2)^2 - \\ &\quad - 2I\,(H - v_1)\,(K - v_2) = 0 \\ &(B\,D-I^2)\,(v_1'-F) + D\,(E-v)\,(H-v_1) + B\,(G-v_1)\,(K-v_2) - \\ &\quad - I\,(E-v)\,(K-v_2) - I\,(G-v_1)\,(H-v_1) = 0. \end{aligned}$$

Würde man im Stande sein, die drei letzten Gleichungen, welche Differential-Gleichungen der ersten Ordnung sind, zu integriren, so hätte man v, v_1 und v_2 als Functionen von x mit drei willkürlichen Constanten versehen, und dann ergäbe sich auch unmittelbar λ_1, λ_3 μ_1, μ_2. Aber die Integration dieser drei Gleichungen auf directem Wege zu bewerkstelligen macht bedeutende Schwierigkeiten; wir wollen uns daher die Integrale derselben verschaffen auf eine Art, die ganz analog ist der, wie wir uns im ersten Memoire die Integrale der im §. 4 aufgestellten Gleichungen verschafften. Wir nehmen nämlich an, dass man die beiden Gleichungen:

$$(92)\quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)' &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} - \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)' &= 0 \end{aligned}$$

integriren könne [1]) und dass ihre Integrale

---

[1]) Um diese Gleichungen zu integriren, ist man im Allgemeinen genöthigt, früher eine der abhängigen Variablen y oder z wegzuschaffen. Zu dem Behufe differenzire man dieselben zweimal nach einander. Die vorgelegten zwei Gleichungen sind Functionen von

$$x,\ y,\ y',\ y'',\ z,\ z',\ z'',$$

die einmal differenzirten Gleichungen sind Functionen von

$$x,\ y,\ y',\ y'',\ y''',\ z,\ z',\ z'',\ z'''$$

$$y = \varphi\left(x, a_1, a_2, a_3, a_4\right)$$
$$z = \psi\left(x, a_1, a_2, a_3, a_4\right)$$

seien; die Integrale der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial y} - \left(\frac{\partial W}{\partial y'}\right)' = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial z} - \left(\frac{\partial W}{\partial z'}\right)' = 0 \end{aligned} \tag{93}$$

die sich in entwickelter Gestalt auch so schreiben lassen:

$$\begin{aligned} B w'' + I u'' + B' w' + u' (H + I' - G) + \\ + w (E' - A) + u (H' - F) = 0 \\ D u'' + I w'' + D' u' + w' (G + I' - H) + \\ + u (K' - C) + w (G' - F) = 0 \end{aligned} \tag{94}$$

sind:

$$\begin{aligned} w = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} \\ u = A_1 \frac{\partial z}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial z}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial z}{\partial a_4}. \end{aligned} \tag{95}$$

Betrachten wir nun die Gleichung:

$$\left\{w \frac{\partial W}{\partial y'} + u \frac{\partial W}{\partial z'}\right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ w \left[\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y'}\right] + u \left[\frac{\partial W}{\partial z} - \left(\frac{\partial W}{\partial z'}\right)'\right]\right\} dx =$$

$$\left\{ r w^2 + 2 r_1 u w + r_2 u^2 \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} B (w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2 \, dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} L (u' + \mu_1 w + \mu_2 u)^2 \, dx,$$

---

und die nochmals differenzirten. Functionen von

$$x, y, y', y'', y''', y'''', z, z', z'', z''', z''''.$$

Eliminirt man aus diesen sechs Gleichungen die fünf Grössen

$$z, z', z'', z''', z'''',$$

so erhält man eine Differential-Gleichung der vierten Ordnung von der Form

$$F\left(x, y, y', y'', y''', y''''\right) = 0;$$

ergibt sich hieraus

$$y = \varphi\left(x, a_1, a_2, a_3, a_4\right),$$

so wird man diesen Werth von y in die vier ersten von den sechs Gleichungen einführen, und aus denselben dann z suchen. Man erhält dann offenbar

$$z = \psi\left(x, a_1, a_2, a_3, a_4\right).$$

welche identisch sein muss, falls die Grössen $v, v_1, v_2, \lambda_1 . \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 . L$ gehörig gewählt sind. Das im ersten Theile derselben vorkommende Integral verschwindet, wenn man statt u und v die Ausdrücke in (95) substituirt; also muss, wenn man dieselbe Substitution im zweiten Theile der Gleichung durchführt, auch da die Integrale verschwinden; mit andern Worten, die in (95) stehenden Ausdrücke sind die vollständigen Integrale der zwei Differential-Gleichungen:

$$w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u = 0$$
$$u' + \mu_1 w + \mu_2 u = 0.$$

Man kann nun ebenso, als die vollständigen Integrale dieser Gleichungen folgende Ausdrücke ansehen:

$$w = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}$$
$$u = B_1 \frac{\partial z}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial z}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial z}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial z}{\partial a_4}$$

nud demgemäss die Coëfficienten $\lambda_1, \lambda_3 . \mu_1, \mu_2$ bestimmen. Setzt man nun

$$\alpha_1 = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}$$
$$\alpha_2 = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}$$
$$\beta_1 = A_1 \frac{\partial z}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial z}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial z}{\partial a_4}$$
$$\beta_2 = B_1 \frac{\partial z}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial z}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial z}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial z}{\partial a_4}$$

so hat man:

$$\alpha_1' + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1' + \lambda_3 \beta_1 = 0 \qquad \beta_1' + \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \beta_1 = 0$$
$$\alpha_2 + \lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_2' + \lambda_3 \beta_2 = 0 \qquad \beta_2' + \mu_1 \alpha_2 + \mu_2 \beta_2 = 0$$

und hieraus folgt:

$$(96) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\alpha_2' \beta_1 - \alpha_1' \beta_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} + \frac{I}{B} \frac{\beta_1 \beta_2' - \beta_1' \beta_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \\ \lambda_3 &= \frac{\alpha_2 \alpha_1' - \alpha_1 \alpha_2'}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} + \frac{I}{B} \frac{\alpha_2 \beta_1' - \alpha_1 \beta_2'}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \\ \mu_1 &= \frac{\beta_1 \beta_2' - \beta_1' \beta_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \\ \mu_2 &= \frac{\alpha_2 \beta_1' - \alpha_1 \beta_2'}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1} \end{aligned}$$

Nachdem wir nun die Werthe von λ_1, λ_3, μ_1, μ_2 aufgestellt haben, suchen wir aus den Gleichungen (79) v, v_1 und v_2. Man hat für dieselben:

$$\begin{aligned} v &= E - B\lambda_1 \\ v_1 &= H - B\lambda_3 \\ v_2 &= K - I\lambda_3 - \frac{BD - I^2}{B}\mu_2 \end{aligned} \tag{97}$$

und wenn unsere Analyse gegen jeden Einwand gesichert sein soll (denn die Schlüsse, mittelst welchen wir zu $\lambda_1, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ kamen, könnten vielleicht Einwände hervorrufen), müssen wir noch nachweisen:

Erstens. Dass die gefundenen Werthe von $\lambda_1, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, v, v_1, v_2$, den noch übrig bleibenden Gleichungen (78), nämlich

$$\begin{aligned} A &= v' + B\lambda_1^2 + \frac{BD - I^2}{B}\mu_1^2 \\ C &= v_2' + B\lambda_3^2 + \frac{BD - I^2}{B}\mu_2^2 \\ F &= v_1' + B\lambda_1\lambda_3 + \frac{BD - I^2}{B}\mu_1\mu_2 \\ G &= v_1 + I\lambda_1 + \frac{BD - I^2}{B}\mu_1 \end{aligned} \tag{98}$$

genügen, und

zweitens, dass sie mit drei willkürlichen Constanten versehen sind.

Falls alles dies dargethan ist, folgt von selbst, dass die Ausdrücke in (97) die Integrale der drei Differential-Gleichungen (91) sind.

Bevor wir weiter gehen, führen wir folgende Bezeichnungsweise ein:

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 &= M_1 \\ \alpha_1'\beta_2 - \alpha_2'\beta_1 &= M_2 \\ \alpha_1\beta_2' - \alpha_2\beta_1' &= M_3 \\ \alpha_1\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2 &= M_4 \\ \beta_1\beta_2' - \beta_1'\beta_2 &= M_5 \\ \alpha_1'\beta_2' - \alpha_2'\beta_1' &= M_6 \\ \alpha_1''\beta_2 - \alpha_2''\beta_1 &= M_7 \\ \alpha_1\beta_2'' - \alpha_2\beta_1'' &= M_8 \\ \alpha_1\alpha_2'' - \alpha_1''\alpha_2 &= M_9 \\ \beta_1\beta_2'' - \beta_1''\beta_2 &= M_{10} \end{aligned}$$

dadurch wird:

$$(99)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{M_2}{M_1} + \frac{I}{B}\frac{M_5}{M_1} \\ \lambda_2 &= \frac{I}{B} \\ \lambda_3 &= -\frac{M_4}{M_1} - \frac{I}{B}\frac{M_3}{M_1} \\ \mu_1 &= \frac{M_5}{M_1} \\ \mu_2 &= -\frac{M_3}{M_1} \end{aligned}$$

und die Werthe von v, v_1, v_2 sind:

$$(100)\qquad \begin{aligned} v &= E + B\frac{M_2}{M_1} - I\frac{M_5}{M_1} \\ v_1 &= H + B\frac{M_4}{M_1} + I\frac{M_3}{M_1} \\ v_2 &= K + I\frac{M_4}{M_1} + D\frac{M_3}{M_1}. \end{aligned}$$

Aus diesen ergeben sich durch Differentiation:

$$\begin{aligned} v' &= E' + B'\frac{M_2}{M_1} + B\frac{M_1 M_2' - M_2 M_1'}{M_1^2} - I'\frac{M_5}{M_1} - I\frac{M_1 M_5' - M_5 M_1'}{M_1^2} \\ v_1' &= H' + B'\frac{M_4}{M_1} + B\frac{M_1 M_4' - M_4 M_1'}{M_1^2} + I'\frac{M_3}{M_1} + I\frac{M_1 M_3' - M_3 M_1'}{M_1^2} \\ v_2' &= K' + I'\frac{M_4}{M_1} + I\frac{M_1 M_4' - M_4 M_1'}{M_1^2} + D'\frac{M_3}{M_1} + D\frac{M_1 M_3' - M_3 M_1'}{M_1^2}. \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} M_1' &= M_2 + M_3 \\ M_2' &= M_6 + M_7 \\ M_3' &= M_6 + M_8 \\ M_4' &= M_9 \\ M_5' &= M_{10} \end{aligned}$$

folglich, wenn man diese Werthe einführt:

$$\begin{aligned} v' = E' + B'\frac{M_2}{M_1} + B\frac{M_1 M_6 + M_1 M_7 - M_2^2 - M_2 M_3}{M_1^2} - \\ - I'\frac{M_5}{M_1} - I\frac{M_1 M_{10} - M_2 M_5 - M_3 M_5}{M_1^2} \end{aligned}$$

$$v_1' = H' + B'\,\frac{M_4}{M_1} + B\,\frac{M_1\,M_9 - M_2\,M_4 - M_3\,M_4}{M_1^2} +$$
$$+ \;I'\,\frac{M_3}{M_1} + I\,\frac{M_1\,M_6 + M_1\,M_8 - M_2\,M_3 - M_3^2}{M_1^2}$$

$$v_2' = K' + I'\,\frac{M_4}{M_1} + I\,\frac{M_1\,M_9 - M_2\,M_4 - M_3\,M_4}{M_1^2} +$$
$$+ \;D'\,\frac{M_3}{M_1} + D\,\frac{M_1\,M_6 + M_1\,M_8 - M_2\,M_3 - M_3^2}{M_1^2}$$

und nun sollen, wenn man diese Werthe in (98) einführt, identische Gleichungen erscheinen. Die erste von ihnen ist:

$$-A + E' + B'\,\frac{M_2}{M_1} + B\,\frac{M_1\,M_6 + M_1\,M_7 - M_2^2 - M_2\,M_3}{M_1^2} - I'\,\frac{M_5}{M_1} +$$
$$+ \;I\,\frac{M_2\,M_5 + M_3\,M_5 - M_1\,M_{10}}{M_1^2} + B\,\Big(\frac{M_2^2}{M_1^2} - 2\,\frac{I}{B}\,\frac{M_2\,M_5}{M_1^2} +$$
$$+ \;\frac{I^2}{B^2}\,\frac{M_5^2}{M_1^2}\Big) + \frac{B\,D - I^2}{B}\,\frac{M_5^2}{M_1^2} = 0$$

und gibt reducirt:

$$-\;A + E' + B'\,\frac{M_2}{M_1} + B\,\frac{M_1\,M_6 + M_1\,M_7 - M_2\,M_3}{M_1^2} - I'\,\frac{M_5}{M_1} +$$
$$+ \;I\,\frac{M_3\,M_5 - M_2\,M_5 - M_1\,M_{10}}{M_1^2} + D\,\frac{M_5^2}{M_1^2} = 0.$$

Die zweite der Gleichungen (98) heisst:

$$-\;C + K' + I'\,\frac{M_4}{M_1} + I\,\frac{M_1M_9 - M_2M_4 - M_3M_4}{M_1^2} + D'\,\frac{M_3}{M_1} +$$
$$+ \;D\,\frac{M_1M_6 + M_1M_8 - M_2M_3 - M_3^2}{M_1^2} + B\,\Big(\frac{M_4^2}{M_1^2} + 2\,\frac{I}{B}\,\frac{M_3M_4}{M_1^2} +$$
$$+ \;\frac{I^2}{B^2}\,\frac{M_3^2}{M_1^2}\Big) + \frac{BD - I^2}{B}\,\frac{M_3^2}{M_1^2} = 0$$

und gibt reducirt:

$$-\;C + K' + I'\,\frac{M_4}{M_1} + I\,\frac{M_1M_9 - M_2M_4 + M_3M_4}{M_1^2} + D'\,\frac{M_3}{M_1} +$$
$$+ \;D\,\frac{M_1M_6 + M_1M_8 - M_2M_3}{M_1^2} + B\,\frac{M_4^2}{M_1^2} = 0.$$

Die dritte der Gleichungen (98) ist:

$$-\,F + H' + B'\,\frac{M_4}{M_1} + B\,\frac{M_1M_9 - M_2M_4 - M_3M_4}{M_1^2} + I'\,\frac{M_3}{M_1} +$$
$$+ \;I\,\frac{M_1M_6 + M_1M_8 - M_2M_3 - M_3^2}{M_1^2} + B\,\Big(\frac{M_2M_4}{M_1^2} - \frac{I}{B}\,\frac{M_4M_5}{M_1^2} +$$
$$+ \;\frac{I}{B}\,\frac{M_2M_3}{M_1^2} - \frac{I^2}{B^2}\,\frac{M_3M_5}{M_1^2}\Big) - \frac{BD - I^2}{B}\,\frac{M_3M_5}{M_1^2} = 0$$

oder reducirt:

$$-F+H'+B'\frac{M_4}{M_1}+B\frac{M_1M_9-M_3M_4}{M_1^2}+\Gamma'\frac{M_3}{M_1}+$$
$$+\Gamma\frac{M_1M_6+M_1M_8-M_4M_5-M_3^2}{M_1^2}-D\frac{M_3M_5}{M_1^2}=0.$$

Endlich ist die letzte der Gleichungen (98)

$$-G+H+B\frac{M_4}{M_1}+\Gamma\frac{M_3}{M_1}-\Gamma\frac{M_2}{M_1}+\frac{\Gamma^2}{B}\frac{M_5}{M_1}+\frac{BD-\Gamma^2}{B}\frac{M_5}{M_1}=0$$

oder

$$-G+H+B\frac{M_4}{M_1}+\Gamma\frac{M_3-M_2}{M_1}+D\frac{M_5}{M_1}=0.$$

Statt den vier Gleichungen (98) kann man daher folgende vier Gleichungen stellen:

$$\begin{aligned}
(101)\quad & -A+E'+B'\frac{M_2}{M_1}+B\frac{M_1M_6+M_1M_7-M_2M_3}{M_1^2}-\Gamma'\frac{M_5}{M_1}+\\
&\quad+\Gamma\frac{M_3M_5-M_2M_5-M_1M_{10}}{M_1^2}+D\frac{M_5^2}{M_1^2}=0\\
& -C+K'+\Gamma'\frac{M_4}{M_1}+\Gamma\frac{M_1M_9-M_2M_4+M_3M_4}{M_1^2}+D'\frac{M_3}{M_1}+\\
&\quad+D\frac{M_1M_6+M_1M_8-M_2M_3}{M_1^2}+B\frac{M_4^2}{M_1^2}=0\\
& -F+H'+B'\frac{M_4}{M_1}+B\frac{M_1M_9-M_3M_4}{M_1^2}+\Gamma'\frac{M_3}{M_1}+\\
&\quad+\Gamma\frac{M_1M_6+M_1M_8-M_4M_5-M_3^2}{M_1^2}-D\frac{M_3M_5}{M_1^2}=0\\
& -G+H+B\frac{M_4}{M_1}+\Gamma\frac{M_3-M_2}{M_1}+D\frac{M_5}{M_1}=0.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun diese Gleichungen dadurch vereinfachen, dass wir an die Stelle von $-A+E'$, $-C+K'$, $-F+H'$ andere, ihnen identisch gleiche Werthe setzen. Um solche zu finden, nehmen wir die zwei identischen Gleichungen:

$$B\alpha_1''+\Gamma\beta_1''+B'\alpha'_1+\beta_1'(H+\Gamma'-G)+\alpha_1(E'-A)+\beta_1(H'-F)=0$$
$$B\alpha_2''+\Gamma\beta_2''+B'\alpha'_2+\beta_2'(H+\Gamma'-G)+\alpha_2(E'-A)+\beta_2(H'-F)=0$$

multipliciren die erste mit α_2, die zweite mit α_1 und subtrahiren dann beide von einander, dies gibt:

$$B(\alpha_1''\alpha_2-\alpha_2''\alpha_1)+I(\beta_1''\alpha_2-\beta_2''\alpha_1)+B'(\alpha_1'\alpha_2-\alpha_2'\alpha_1)+$$
$$+(H+I'-G)(\beta_1'\alpha_2-\beta_2'\alpha_1)+(H'-F)(\beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1)=0,$$

oder:

$$BM_9+IM_8+B'M_4+(H+I'-G)M_3+(H'-F)M_1=0;$$

multiplicirt man ferner die erste Gleichung mit β_2, die zweite mit β_1, und subtrahirt beide von einander, so erhält man:

$$B(\alpha_1''\beta_2-\alpha_2''\beta_1)+I(\beta_1''\beta_2-\beta_2''\beta_1)+B'(\alpha_1'\beta_2-\alpha_2'\beta_1)+$$
$$+(H+I'-G)(\beta_1'\beta_2-\beta_2'\beta_1)+(E'-A)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)=0,$$

oder:

$$BM_7-IM_{10}+B'M_2-(H+I'-G)M_5+(E'-A)M_1=0.$$

Nehmen wir jetzt die zwei Gleichungen vor:

$$D\beta_1''+I\alpha_1''+D'\beta_1'+\alpha_1'(G+I'-H)+\beta_1(K'-C)+\alpha_1(G'-F)=0$$
$$D\beta_2''+I\alpha_2''+D'\beta_2'+\alpha_2'(G+I'-H)+\beta_2(K'-C)+\alpha_2(G'-F)=0$$

und verfahren ganz so, wie mit den erst aufgestellten zwei Gleichungen, so erhält man:

$$D(\beta_1''\alpha_2-\beta_2''\alpha_1)+I(\alpha_1''\alpha_2-\alpha_2''\alpha_1)+D'(\beta_1'\alpha_2-\beta_2'\alpha_1)+$$
$$+(G+I'-H)(\alpha_1'\alpha_2-\alpha_2'\alpha_1)+(K'-C)(\beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1)=0$$

und

$$D(\beta_1''\beta_2-\beta_2''\beta_1)+I(\alpha_1''\beta_2-\alpha_2''\beta_1)+D'(\beta_1'\beta_2-\beta_2'\beta_1)+$$
$$+(G+I'-H)(\alpha_1'\beta_2-\alpha_2'\beta_1)+(G'-F)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)=0$$

oder, was dasselbe ist:

$$DM_8+IM_9+D'M_3+(G+I'-H)M_4+(K'-C)M_1=0$$
$$-DM_{10}+IM_7-D'M_5+(G+I'-H)M_2+(G'-F)M_1=0.$$

Demnach ist:

$$\left.\begin{aligned}
-F+H' &= -B\frac{M_9}{M_1}-I\frac{M_8}{M_1}-B'\frac{M_4}{M_1}-(H+I'-G)\frac{M_3}{M_1}\\
-A+E' &= -B\frac{M_7}{M_1}+I\frac{M_{10}}{M_1}-B'\frac{M_2}{M_1}+(H+I'-G)\frac{M_5}{M_1}\\
-C+K' &= -D\frac{M_8}{M_1}-I\frac{M_9}{M_1}-D'\frac{M_3}{M_1}-(G+I'-H)\frac{M_4}{M_1}\\
-F+G' &= D\frac{M_{10}}{M_1}-I\frac{M_7}{M_1}+D'\frac{M_5}{M_1}-(G+I'-H)\frac{M_2}{M_1}.
\end{aligned}\right\}\quad(102)$$

Führt man nun diese Werthe in die Gleichungen (101) ein, so erhält man statt denselben:

$$(103)\quad \begin{aligned}
&(H-G)\frac{M_5}{M_1}+B\frac{M_1M_6-M_2M_3}{M_1^2}+I\frac{M_5(M_3-M_2)}{M_1^2}+D\frac{M_5^2}{M_1^2}=0\\
&(H-G)\frac{M_4}{M_1}+I\frac{M_4(M_3-M_2)}{M_1^2}+D\frac{M_1M_6-M_2M_3}{M_1^2}+B\frac{M_4^2}{M_1^2}=0\\
&(H-G)\frac{M_3}{M_1}+B\frac{M_3M_4}{M_1^2}+I\frac{M_3^2+M_4M_5-M_1M_6}{M_1^2}+D\frac{M_3M_5}{M_1^2}=0\\
&(H-G)\qquad+B\frac{M_4}{M_1}+I\frac{M_3-M_2}{M_1}+D\frac{M_5}{M_1}=0
\end{aligned}$$

Bemerkt man noch, dass

$$M_1M_6-M_2M_3=M_4M_5$$

ist, so sieht man, dass allen den vier Gleichungen (103) genügt wird, wenn die letzte von ihnen stattfindet. Die letzte lässt sich aber so schreiben:

$$(104)\qquad M_1(H-G)+BM_4+I(M_3-M_2)+DM_5=0$$

und gibt differenzirt:

$$(105)\qquad \begin{aligned}M_1(H'-G')+(M_2+M_3)(H-G)+B'M_4+BM_9+I'(M_3-M_2)+\\+I(M_8-M_7)+D'M_5+DM_{10}=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist aber eine identische. Man kann sich von der Identität derselben dadurch leicht überzeugen, dass man die zwei identischen Gleichungen

$$\begin{aligned}-DM_{10}+IM_7-D'M_5+(G+I'-H)M_2+(G'-F)M_1=0\\ BM_9+IM_8+B'M_4+(H+I'-G)M_3+(H'-F)M_1=0\end{aligned}$$

von einander subtrahirt; ihre Differenz gibt die Gleichung (105).

Da nun die Gleichung (105) identisch stattfindet, so muss der erste Theil derselben identisch Null sein, weil es der zweite Theil auch ist; daraus folgt, dass der erste Theil der Gleichung (104) einer Constanten gleich ist, und zwar der Constanten Null, weil der zweite Theil der Gleichung (104) auch Null ist.

Wenn wir nun zur wirklichen Berechnung von λ_1, λ_3, μ_1, μ_2 schreiten wollen, so müssen wir die Grössen M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 entwickeln, diese sind:

$$M_1 = C_1 \left(\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial z}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial z}{\partial a_2}\right) + C_2 \left(\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial z}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial z}{\partial a_3}\right) +$$
$$+ C_3 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial z}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial z}{\partial a_4}\right) + C_4 \left(\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial z}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial z}{\partial a_3}\right) +$$
$$+ C_5 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial z}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial z}{\partial a_4}\right) + C_6 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial z}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial z}{\partial a_4}\right)$$

$$M_2 = C_1 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial z}{\partial a_1} - \frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial z}{\partial a_2}\right) + C_2 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial z}{\partial a_1} - \frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial z}{\partial a_3}\right) +$$
$$+ C_3 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial z}{\partial a_1} - \frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial z}{\partial a_4}\right) + C_4 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial z}{\partial a_2} - \frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial z}{\partial a_3}\right) +$$
$$+ C_5 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial z}{\partial a_2} - \frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial z}{\partial a_4}\right) + C_6 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial z}{\partial a_3} - \frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial z}{\partial a_4}\right)$$

$$M_3 = C_1 \left(\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial z'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial z'}{\partial a_2}\right) + C_2 \left(\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial z'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial z'}{\partial a_3}\right) +$$
$$+ C_3 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial z'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial z'}{\partial a_4}\right) + C_4 \left(\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial z'}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial z'}{\partial a_3}\right) +$$
$$+ C_5 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial z'}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial z'}{\partial a_4}\right) + C_6 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial z'}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial z'}{\partial a_4}\right)$$

$$M_4 = C_1 \left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\right) + C_2 \left(\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\right) +$$
$$+ C_3 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\right) + C_4 \left(\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\right) +$$
$$+ C_5 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\right) + C_6 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\right)$$

$$M_5 = C_1 \left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z'}{\partial a_1} - \frac{\partial z}{\partial a_1}\frac{\partial z'}{\partial a_2}\right) + C_2 \left(\frac{\partial z}{\partial a_3}\frac{\partial z'}{\partial a_1} - \frac{\partial z}{\partial a_1}\frac{\partial z'}{\partial a_3}\right) +$$
$$+ C_3 \left(\frac{\partial z}{\partial a_4}\frac{\partial z'}{\partial a_1} - \frac{\partial z}{\partial a_1}\frac{\partial z'}{\partial a_4}\right) + C_4 \left(\frac{\partial z}{\partial a_3}\frac{\partial z'}{\partial a_2} - \frac{\partial z}{\partial a_2}\frac{\partial z'}{\partial a_3}\right) +$$
$$+ C_5 \left(\frac{\partial z}{\partial a_4}\frac{\partial z'}{\partial a_2} - \frac{\partial z}{\partial a_2}\frac{\partial z'}{\partial a_4}\right) + C_6 \left(\frac{\partial z}{\partial a_4}\frac{\partial z'}{\partial a_3} - \frac{\partial z}{\partial a_3}\frac{\partial z'}{\partial a_4}\right)$$

wo C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, folgende Bedeutungen haben:

$$C_1 = A_2 B_1 - A_1 B_2$$
$$C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3$$
$$C_3 = A_4 B_1 - A_1 B_4$$
$$C_4 = A_3 B_2 - A_2 B_3$$
$$C_5 = A_4 B_2 - A_2 B_4$$
$$C_6 = A_4 B_3 - A_3 B_4$$

Substituirt man die gefundenen Werthe für M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 in die Gleichungen (99), so sieht man, dass $\lambda_1, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ blos sechs Constante enthalten, welche aber nicht ganz willkürlich sind, da zwischen ihnen folgende zwei Gleichungen bestehen:

$$C_1 C_6 - C_2 C_5 + C_3 C_4 = 0$$

$$M_1 (H - G) + B M_4 + I (M_3 - M_2) + D M_5 = 0.$$

Da man ferner durch irgend ein C Zähler und Nenner dividiren kann, so haben die gewonnenen Ausdrücke die erforderliche und hinreichende Allgemeinheit.

Man hat somit:

$$\int_{x_1}^{x_2} (A w^2 + B w'^2 + C u^2 + D u'^2 + 2E w w' + 2F w u + 2G w u' +$$

$$+ 2H w' u + 2I w' u' + 2K u u')\, dx = \Big\{ v w^2 + 2 v_1 u w + v_2 u^2 \Big\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} B (w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{BD - I^2}{B} (u' + \mu_1 w + \mu_2 u)^2 dx.$$

Die Kriterien sind daher folgende:

Die zweiten Differential-Quotienten von V dürfen innerhalb der Integrations-Grenzen nicht durch unendlich gehen, ferner müssen B und $\frac{BD - I^2}{B}$ für alle Werthe von $x = x_1$ bis $x = x_2$ stets dasselbe Zeichen beibehalten; endlich müssen noch die drei, in der Rechnung eintretenden willkürlichen Constanten so gewählt werden können, dass für keinen zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth von x der gemeinschaftliche Nenner von $\lambda_1, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ gleich Null wird.

Findet alles dieses Statt, und lassen sich für die drei Constanten solche Werthe ausfindig machen, durch die es unmöglich wird, dass der Nenner von λ_1, λ_3, μ_1 und μ_2 innerhalb der Integrations-Grenzen gleich Null wird, so kann man, wenn für die Grenzwerthe $w = 0$ und $u = 0$ ist [1]), die Glieder der zweiten Ordnung so schreiben:

$$\int_{x_1}^{x_2} B (w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{BD - I^2}{B} (u' + \mu_1 w + \mu_2 u)^2 dx$$

---

[1]) Diese Bedingungen finden Statt, wenn man die in $y = \varphi (x, a_1, a_2, a_3, a_4)$ $z = \psi (x, a_1, a_2, a_3, a_4)$ eintretenden Constanten so wählt, dass dem $x = x_1$ die bestimmten Werthe $y = y_1$ und $z = z_1$ und dem $x = x_2$ die bestimmten Werthe $y = y_2$ und $z = z_2$ entsprechen.

und hat somit ein Maximum oder Minimum, je nachdem B und $\frac{BD-I^2}{B}$ für alle zwischen x_1 und x_2 liegenden Werthe von x negativ oder positiv ist.

1. Anmerkung. Die Bedingung, dass B und $\frac{BD-I^2}{B}$ stets einerlei Zeichen haben sollen, lässt sich einfacher auch so ausdrücken:

B und D müssen einerlei Zeichen haben, und $BD-I^2$ muss stets positiv sein.

2. Anmerkung. Man könnte die Glieder zweiter Ordnung auch so darstellen.

$$\int_{x_1}^{x_2} D\,(u'+\lambda_4 u+\lambda_5 w'+\lambda_6 w)^2\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{BD-I^2}{D}(w'+\mu_3 u+\mu_4 w)^2\,dx,$$

wo λ_4, λ_5, λ_6, μ_3, μ_4 Ausdrücke sind, welche die grösste Analogie haben mit λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2.

§. 22.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, jene lineare Differential-Gleichung zu kennen, deren particuläre Integrale

$$w = \frac{\partial y}{\partial a_1},\ w = \frac{\partial y}{\partial a_2},\ w = \frac{\partial y}{\partial a_3},\ w = \frac{\partial y}{\partial a_4}$$

oder

$$u = \frac{\partial z}{\partial a_1},\ u = \frac{\partial z}{\partial a_2},\ u = \frac{\partial z}{\partial a_3},\ u = \frac{\partial z}{\partial a_4}$$

sind. Um die ersteren zu finden, hat man aus den beiden linearen Differential-Gleichungen

$$\begin{aligned} &Bw'' + Iu'' + B'w' + u'\,(H + I' - G) + w\,(E' - A) + \\ &\qquad u\,(H' - F) = 0 \\ &Du'' + Iw'' + D'u' + w'\,(G + I' - H) + u\,(K' - C) + \\ &\qquad w\,(G' - F) = 0 \end{aligned} \tag{94}$$

das u, und um die zweite zu finden, aus denselben Gleichungen w zu eliminiren. In beiden Fällen differenzire man die eben aufgestellten Gleichungen zweimal hinter einander, man erhält dadurch:

$$\begin{aligned} &Bw''' + Iu''' + 2B'w'' + u''\,(H + 2I' - G) + w'\,(B'' + \\ &+ E' - A) + u'\,(2H' + I'' - F - G') + w\,(E'' - A') + \\ &+ u\,(H'' - F') = 0, \end{aligned} \tag{106}$$

$$
(106)\quad
\begin{aligned}
& B w'''' + I u'''' + 3B' w''' + u''' (H + 3I' - G) + w'' (3B'' + E' - A) + \\
& \quad + u'' (3H' - F + 3I'' - 2G') + w' (B''' + 2E'' - 2A') + \\
& \quad + u' (3H'' + I''' - 2F' - G'') + w (E''' - A'') + u (H''' - F'') = 0, \\
& D u''' + I w''' + 2D' u'' + w'' (G + 2I' - H) + u' (D'' + K' - C) + \\
& \quad + w' (2G' + I'' - F - H') + u (K'' - C') + w (G'' - F') = 0, \\
& D u'''' + I w'''' + 3 D' u''' + w''' (G + 3I' - H) + u'' (3D'' + \\
& \quad + K' - C) + w'' (3G' + 3I'' - F - 2H') + u' (D''' + 2K'' - \\
& \quad - 2C') + w' (3G'' + I''' - 2F' - H'') + u (K''' - C'') + \\
& \quad w (G''' - F'') = 0.
\end{aligned}
$$

Wenn wir jetzt die Elimination von u, u', u'', u''', u'''' bewerkstelligen wollen, so ordnen wir diese sechs Gleichungen nach denselben, man hat:

	u	u'	u''	u'''	u''''
$B w'' + B' w' + w (E' - A)$	$H' - F$	$H + I' - G$	I	0	0
$B w''' + 2 w'' B' + w' (B'' + E' - A) + w (E'' - A')$	$H'' - F'$	$2H' + I'' - F - G'$	$H + 2I' - G'$	I	0
$B w'''' + 3 w''' B' + w'' (3 B'' + E' - A) + w' (B''' + 2 E'' - 2 A') + w (E''' - A'')$	$H''' - F''$	$3 H'' + I''' - 2 F' - G''$	$3 H' - F + 3 I'' - 2 G'$	$H + 3I' - G$	I
$I w'' + w' (G + I' - H) + w (G' - F)$	$K' - C$	D'	D	0	0
$I w''' + w'' (G + 2 I' - H) + w' (2 G' + I'' - F - H') + w (G'' - F')$	$K'' - C'$	$D'' + K' - C$	$2 D'$	D	0
$I w'''' + w''' (G + 3 I' - H) + w'' (3 G' + 3 I'' - F - 2 H') + w' (3 G'' + I''' - 2F' - H'') + w (G''' - F'')$	$K''' - C''$	$D''' + 2 K'' - 2 C'$	$3 D'' + K' - C$	$3 D'$	D

Bildet man nun aus diesen Ausdrücken die Determinante, setzt dieselbe gleich Null, so ist dies die gewünschte Differential-Gleichung, deren Integral

$$
w = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}
$$

ist. — Aber die vollständige, regelrechte Bildung dieser Determinante führt zu äusserst complicirten Ausdrücken; vielleicht dürfte der hier befolgte Gang empfehlungswerth sein.

Bezeichnet man

$$a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \quad \text{mit} \quad \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right\}$$

$$a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, b_3\, c_2 - a_2\, b_1\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1$$

$$\text{mit} \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&+ a_1\, b_2\, c_3\, d_4 - a_1\, b_2\, c_4\, d_3 - a_1\, b_3\, c_2\, d_4 + a_1\, b_3\, c_4\, d_2 + \\
&+ a_1\, b_4\, c_2\, d_3 - a_1\, b_4\, c_3\, d_2 - a_2\, b_1\, c_3\, d_4 + a_2\, b_1\, c_4\, d_3 + \\
&+ a_2\, b_3\, c_1\, d_4 - a_2\, b_3\, c_4\, d_1 - a_2\, b_4\, c_1\, d_3 + a_2\, b_4\, c_3\, d_1 + \\
&+ a_3\, b_1\, c_2\, d_4 - a_3\, b_1\, c_4\, d_2 - a_3\, b_2\, c_1\, d_4 + a_3\, b_2\, c_4\, d_1 + \\
&+ a_3\, b_4\, c_1\, d_2 - a_3\, b_4\, c_2\, d_1 - a_4\, b_1\, c_2\, d_3 + a_4\, b_1\, c_3\, d_2 + \\
&+ a_4\, b_2\, c_1\, d_3 - a_4\, b_2\, c_3\, d_1 - a_4\, b_3\, c_1\, d_2 + a_4\, b_3\, c_2\, d_1
\end{aligned}$$

$$\text{mit} \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{matrix}\right\}$$

u. s. f. mit einem Worte, bezeichnet man den gemeinschaftlichen Nenner der sich für $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ aus der Auflösung folgenden Systems von Gleichungen ersten Grades

$$\begin{matrix}
a_1\, x_1 + b_1\, x_2 + c_1\, x_3 + \ldots + k_1\, x_n = m_1 \\
a_2\, x_1 + b_2\, x_2 + c_2\, x_3 + \ldots + k_2\, x_n = m_2 \\
a_3\, x_1 + b_3\, x_2 + c_3\, x_3 + \ldots + k_3\, x_n = m_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n\, x_1 + b_n\, x_2 + c_n\, x_3 + \ldots + k_n\, x_n = m_n
\end{matrix}$$

ergibt, mit

$$\left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & k_n \end{matrix}\right\}$$

so hat man die Gleichung:

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \ldots & k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & \ldots & k_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & \ldots & k_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & d_n & \ldots & k_n \end{matrix}\right\}
&= a_1 \left\{\begin{matrix} b_2 & c_2 & d_2 & \ldots & k_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & \ldots & k_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & \ldots & k_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ b_n & c_n & d_n & \ldots & k_n \end{matrix}\right\}
- a_2 \left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & \ldots & k_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 & \ldots & k_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & \ldots & k_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ b_n & c_n & d_n & \ldots & k_n \end{matrix}\right\} + \\
&+ a_3 \left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & \ldots & k_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & \ldots & k_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 & \ldots & k_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ b_n & c_n & d_n & \ldots & k_n \end{matrix}\right\}
- \ldots + (-1)^{n-1} a_n \left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & \ldots & k_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & \ldots & k_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & \ldots & k_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} & \ldots & k_{n-1} \end{matrix}\right\}
\end{aligned} \tag{107}$$

von deren Richtigkeit man sich auf der Stelle überzeugen kann; man hat nur nöthig, den ersten Theil der Gleichung (107) der aus $n!$ Glieder besteht, sich in entwickelter und gehörig geordneter Form zu denken, bei den ersten $(n-1)!$ Gliedern a_1, bei den nächsten $(n-1)!$ Gliedern a_2, wieder bei den nächsten $(n-1)!$ Gliedern $a_3 \ldots$ u. s. f. als Factor herauszuheben, die Factoren selbst sind dann der Reihe nach:

$$+\begin{Bmatrix} b_2\ c_2\ d_2 \ldots k_2 \\ b_3\ c_3\ d_3 \ldots k_3 \\ b_4\ c_4\ d_4 \ldots k_4 \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_n\ c_n\ d_n \ldots k_n \end{Bmatrix}, -\begin{Bmatrix} b_1\ c_1\ d_1 \ldots k_1 \\ b_3\ c_3\ d_3 \ldots k_3 \\ b_4\ c_4\ d_4 \ldots k_4 \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_n\ c_n\ d_n \ldots k_n \end{Bmatrix}, +\begin{Bmatrix} b_1\ c_1\ d_1 \ldots k_1 \\ b_2\ c_2\ d_2 \ldots k_2 \\ b_4\ c_4\ d_4 \ldots k_4 \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_n\ c_n\ d_n \ldots k_n \end{Bmatrix} \ldots$$

Um jetzt auf unsere Aufgabe zu kommen, schreiben wir unsere sechs Gleichungen, woraus die Determinante zu bilden, in folgender Ordnung:

	u''''	u'''	u''	u'	u
$B w'' + B' w' + w (E' - A)$	0	0	I	$H + I' - G$	$H' - F$
$B w''' + 2 w'' B' + w' (B'' + E' - A) + w (E'' - A')$	0	I	$H + 2I' - G$	$2H' + I'' - F - G'$	$H'' - F'$
$B w'''' + 3 w''' B' + w'' (3B'' + E' - A) + w' (B''' + 2E'' - 2A') + w (E''' - A'')$	I	$H + 3I' - G$	$3H' - F + 3I''' - 2G'$	$3H'' + I''' - 2F' - G''$	$H''' - F''$
$I w'' + w' (G + I' - H) + w (G' - F)$	0	0	D	D'	$K' - C$
$I w''' + w'' (G + 2I' - H) + w' (2G' + I'' - F - H') + w (G'' - F')$	0	D	$2D'$	$D'' + K' - C$	$K'' - C'$
$I w'''' + w''' (G + 3I' - H) + w'' (3G' + 3I'' - F - 2H') + w' (3G'' + I''' - 2F' - H'') + w (G''' - F'')$	D	$3D'$	$3D'' + K' - C$	$D''' + 2K'' - 2C'$	$K''' - C''$

und bezeichnen diese Ausdrücke der Reihe nach mit den Buchstaben

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, & e_1, & f_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2, & f_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3, & e_3, & f_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4, & e_4, & f_4 \\ a_5, & b_5, & c_5, & d_5, & e_5, & f_5 \\ a_6, & b_6, & c_6, & d_6, & e_6, & f_6 \end{matrix}$$

so haben wir in Folge der Gleichung (107)

$$\left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = a_1 \left\{\begin{matrix} b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} - a_2 \left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} + \quad (108)$$

$$+ a_3 \left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} - a_4 \left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} +$$

$$+ a_5 \left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} - a_6 \left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Nach derselben Gleichung (107) besteht aber jedes der sechs Glieder unserer jetzt aufgeschriebenen Gleichung aus fünf Theilen, von denen aber stets mehrere verschwinden, weil

$$b_1 = 0 \quad b_2 = 0 \quad b_4 = 0 \quad b_5 = 0$$

ist. Wir haben nämlich:

$$\left\{\begin{matrix} b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = - b_3 \left\{\begin{matrix} c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} + b_6 \left\{\begin{matrix} c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = -b_3 \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} + b_6 \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = b_6 \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = b_3 \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} + b_6 \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = b_3 \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} + b_6 \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\} = b_3 \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\}$$

Um kürzer zu schreiben, setzen wir:

$$\left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \end{matrix}\right\} = N_1, \quad \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\} = N_2, \quad \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\} = N_3,$$

$$\left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = N_4, \quad \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = N_5, \quad \left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\} = N_6,$$

$$\left\{\begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = N_7, \quad \left\{\begin{matrix} c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\} = N_8, \quad \left\{\begin{matrix} c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 & f_5 \\ c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = N_9.$$

Für die Gleichung (108) erhalten wir hierdurch folgende:

$$a_1(-b_3 N_9 + b_6 N_8) - a_2(-b_3 N_7 + b_6 N_6) + a_3 b_6 N_3 -$$
$$-a_4(b_3 N_5 + b_6 N_2) + a_5(b_3 N_4 + b_6 N_1) - a_6 b_3 N_3 = 0.$$

Setzt man nun für $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ und b_3, b_6 ihre Werthe, nämlich

$$a_1 = Bw'' + B'w' + w(E' - A)$$
$$a_2 = Bw''' + 2w''B' + w'(B'' + E' - A) + w(E'' - A')$$
$$a_3 = Bw'''' + 3w'''B' + w''(3B'' + E' - A) + w'(B''' + 2E'' - 2A') +$$
$$+ w(E''' - A'')$$
$$a_4 = Iw'' + w'(G + I' - H) + w(G' - F)$$
$$a_5 = Iw''' + w''(G + 2I' - H) + w'(2G' + I'' - F - H') +$$
$$+ w(G'' - F')$$
$$a_6 = Iw'''' + w'''(G + 3I' - H) + w''(3G' + 3I'' - F - 2H') +$$
$$+ w'(3G'' + I''' - 2F' - H'') + w(G''' - F'')$$
$$b_3 = I$$
$$b_6 = D$$

so hat man nach gehörigem Ordnen:

$$\begin{aligned} & w'''' N_3 (BD - I^2) + w''' [-B(-IN_7 + DN_6) + 3B'DN_3 + \\ & + I(IN_4 + DN_1) - IN_3(G + 3I' - H)] + w''[B(-IN_9 + \\ & + DN_8) - 2B'(-IN_7 + DN_6) + DN_3(3B'' + E' - A) - \\ & - I(IN_5 + DN_2) + (IN_4 + DN_1)(G + 2I' - H) - \\ & - IN_3(3G' + 3I'' - F - 2H')] + w'[B'(-IN_9 + DN_8) - \\ & - (B'' + E' - A)(-IN_7 + DN_6) + DN_3(B''' + 2E'' - \\ & - 2A') - (IN_5 + DN_2)(G + I' - H) + (IN_4 + \\ & + DN_1)(2G' + I'' - F - H') - IN_3(3G'' + I''' - 2F' - \\ & - H'')] + w[(E' - A)(-IN_9 + DN_8) - (E'' - A')(-IN_7 + \\ & + DN_6) + DN_3(E''' - A'') - (IN_5 + DN_2)(G' - F) + \\ & + (IN_4 + DN_1)(G'' - F') - IN_3(G''' - F'')] = 0. \end{aligned} \tag{109}$$

Entwickeln wir jetzt auch noch $N_1, N_2, N_3, N_4 \ldots N_9$, bemerken aber vorher, dass $c_1 = 0$, und $c_4 = 0$ ist, so haben wir:

$$N_1 = -c_2 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_3 & e_3 & f_3 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \end{Bmatrix} + c_3 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \end{Bmatrix}$$

$$N_2 = -c_2 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_3 & e_3 & f_3 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{Bmatrix} + c_3 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{Bmatrix} - c_5 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_3 & e_3 & f_3 \end{Bmatrix}$$

$$N_3 = -c_2 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{Bmatrix} - c_5 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \end{Bmatrix}$$

$$N_4 = -c_2 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_6 & e_6 & f_6 \end{Bmatrix} - c_6 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \end{Bmatrix}$$

$$N_5 = -c_2 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \\ \partial_6 & e_6 & f_6 \end{Bmatrix} + c_5 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_6 & e_6 & f_6 \end{Bmatrix} - c_6 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{Bmatrix}$$

$$N_6 = -c_3 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{Bmatrix} - c_5 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_3 & e_3 & f_3 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \end{Bmatrix}$$

$$N_7 = \quad c_5 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_6 & e_6 & f_6 \end{Bmatrix} - c_6 \begin{Bmatrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{Bmatrix}$$

$$N_8 = \quad c_2 \begin{Bmatrix} \partial_3 & e_3 & f_3 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{Bmatrix} - c_3 \begin{Bmatrix} \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{Bmatrix} - c_5 \begin{Bmatrix} \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_3 & e_3 & f_3 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \end{Bmatrix}$$

$$N_9 = \quad c_2 \begin{Bmatrix} \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \\ \partial_6 & e_6 & f_6 \end{Bmatrix} + c_5 \begin{Bmatrix} \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_6 & e_6 & f_6 \end{Bmatrix} - c_6 \begin{Bmatrix} \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{Bmatrix}$$

und wenn wir auch hier wieder Abkürzungen einführen, nämlich:

$$\left\{\begin{matrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_3 & e_3 & f_3 \end{matrix}\right\} = P_1, \quad \left\{\begin{matrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \end{matrix}\right\} = P_2, \quad \left\{\begin{matrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\} = P_3,$$

$$\left\{\begin{matrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = P_4, \quad \left\{\begin{matrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_3 & e_3 & f_3 \\ d_4 & e_4 & f_4 \end{matrix}\right\} = P_5, \quad \left\{\begin{matrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_3 & e_3 & f_3 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\} = P_6,$$

$$\left\{\begin{matrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\} = P_7, \quad \left\{\begin{matrix} \partial_1 & e_1 & f_1 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = P_8, \quad \left\{\begin{matrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_5 & e_5 & f_5 \\ d_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = P_9,$$

$$\left\{\begin{matrix} \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_3 & e_3 & f_3 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \end{matrix}\right\} = P_{10}, \quad \left\{\begin{matrix} \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\} = P_{11}, \quad \left\{\begin{matrix} \partial_2 & e_2 & f_2 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = P_{12}$$

$$\left\{\begin{matrix} \partial_3 & e_3 & f_3 \\ \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \end{matrix}\right\} = P_{13}, \left\{\begin{matrix} \partial_4 & e_4 & f_4 \\ \partial_5 & e_5 & f_5 \\ \partial_6 & e_6 & f_6 \end{matrix}\right\} = P_{14},$$

ferner für c_2, c_3, c_5, c_6 ihre Werthe setzen, nämlich:

$$\begin{aligned} c_2 &= I \\ c_3 &= H + 3\,I' - G \\ c_5 &= D \\ c_6 &= 3\,D' \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} N_1 &= -\,I\,P_5 + (H + 3\,I' - G)\,P_2 \\ N_2 &= -\,I\,P_6 + (H + 3\,I' - G)\,P_3 - D\,P_1 \\ N_3 &= -\,I\,P_7 - D\,P_2 \\ N_4 &= -\,I\,P_8 - 3\,D'\,P_2 \\ N_5 &= -\,I\,P_9 + D\,P_4 - 3\,D'\,P_3 \\ N_6 &= -\,(H + 3\,I' - G)\,P_7 - D\,P_5 \\ N_7 &= \quad D\,P_8 - 3\,D'\,P_7 \\ N_8 &= \quad I\,P_{13} - (H + 3\,I' - G)\,P_{11} - D\,P_{10} \\ N_9 &= \quad I\,P_{14} + D\,P_{12} - 3\,D'\,P_{11} \end{aligned}$$

und die Gleichung (109) wird folgende Gestalt annehmen:

$$
\begin{aligned}
&-w''''(IP_7+DP_2)(BD-I^2)+w'''[\{3D'P_2+DP_5+P_7(3I'+\\
&\quad +H-G)+IP_8\}(BD-I^2)-3(DP_2+IP_7)(BD-I^2)']+\\
&\quad +w''[D^2IP_1+P_2\{-D^2(3B''+E'-A)-3D'I(G+\\
&\quad +2I'-H)+D(H+3I'-G)(G+2I'-H)+\\
&\quad +DI(3G'+3I''-F-2H')\}+IP_3\{3D'I-D(H+\\
&\quad +3I'-G)\}-DI^2P_4+DP_5\{2B'D-I(G+2I'-H)\}+\\
&\quad +DI^2P_6+P_7\{-6B'D'I+2B'D(H+3I'-G)-\\
&\quad -ID(3B''+E'-A)+I^2(3G'+3I''-F-2H')\}+\\
&\quad +IP_8\{2B'D-I(G+2I'-H)\}+I^3P_9-BD^2P_{10}+\\
&\quad +BP_{11}\{3D'I-D(H+3I'-G)\}+IB(-DP_{12}+DP_{13}-\\
&\quad -IP_{14}\}]+w'[D^2P_1(G+I'-H)+P_2\{-D^2(B'''+2E''-\\
&\quad -2A')-3ID'(2G'+I''-F-H')+D(H+3I'-\\
&\quad -G)(2G'+I''-F-H')+DI(3G''+I'''-2F'-H'')\}+\\
&\quad +P_3(G+I'-H)\{3D'I-D(H+3I'-G)\}-DI(G+\\
&\quad +I'-H)P_4+DP_5\{D(B''+E'-A)-I(2G'+I''-F-H')\}+\\
&\quad +DI(G+I'-H)P_6+P_7\{-3D'I(B''+E'-A)+\\
&\quad +D(H+3I'-G)(B''+E'-A)-DI(B'''+2E''-2A')+\\
&\quad +I^2(3G''+I'''-2F'-H'')\}+IP_8\{D(B''+E'-A)-\\
&\quad -I(2G'+I''-F-H')\}+I^2(G+I'-H)P_9-\\
&\quad -B'D^2P_{10}+B'P_{11}\{3D'I-D(H+3I'-G)\}+IB'(-DP_{12}+\\
&\quad +DP_{13}-IP_{14})]+w[D^2(G'-F)P_1+P_2\{-D^2(E'''-A'')-\\
&\quad -3ID'(G''-F')+D(H+3I'-G)(G''-F')+DI(G'''-\\
&\quad -F'')\}+(G'-F)P_3\{3D'I-D(H+3I'-G)\}-DI(G'-\\
&\quad -F)P_4+DP_5\{D(E''-A')-I(G''-F')\}+DI(G'-F)P_6+\\
&\quad +P_7\{-3D'I(E'-A')+D(H+3I'-G)(E''-A')-DI(E'''-\\
&\quad -A'')+I^2(G'''-F'')\}+IP_8\{D(E'-A')-I(G''-F')\}+\\
&\quad +I^2(G'-F)P_9-D^2(E'-A)P_{10}+(E'-A)P_{11}\{3D'I-\\
&\quad -D(H+3I'-G)\}+I(E'-A)(-DP_{12}+DP_{13}-IP_{14})]=0.
\end{aligned}
\tag{110}
$$

In dieser, wie man sieht, schon sehr complicirten Gleichung hat man noch für $P_1, P_2 \ldots P_{14}$ ihre Werthe einzuführen, diese sind:

$$
\begin{aligned}
P_1 = {} & I(2H'+I''-F-G')(H'''-F'')\\
& -I(3H''+I'''-2F'-G'')(H''-F')\\
& -(H+2I'-G)(H+I''-G)(H'''-F'')\\
& +(H+2I'-G)(3H''+I'''-2F'-G'')(H'-F)\\
& +(3H'-F+3I''-2G')(H+I'-G)(H''-F')\\
& -(3H'-F+3I''-2G')(2H'+I''-F-G')(H'-F)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_2 = {} & I(2H' + I'' - F - G')(K' - C) \\
& - ID'(H'' - F') \\
& - (H + 2I' - G)(H + I' - G)(K' - C) \\
& + D'(H + 2I' - G)(H' - F) \\
& + D(H + I' - G)(H'' - F') \\
& - D(2H' + I'' - F - G')(H' - F)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_3 = {} & I(2H' + I'' - F - G')(K'' - C') \\
& - I(D'' + K' - C)(H'' - F') \\
& - (H + 2I' - G)(H + I' - G)(K'' - C') \\
& + D'(H + 2I' - G)(H' - F) \\
& + 2D'(H + I' - G)(H'' - F') \\
& - 2D'(2H' + I'' - F - G')(H' - F)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_4 = {} & \quad I(2H' + I'' - F - G')(K''' - C'') \\
& - I(D'' + 2K'' - 2C')(H'' - F') \\
& - (H + 2I' - G)(H + I' - G)(K''' - C'') \\
& + (H + 2I' - G)(D''' + 2K'' - 2C')(H' - F) \\
& + (3D'' + K' - C)(H + I' - G)(H'' - F') \\
& - (3D'' + K' - C)(2H' + I'' - F - G')(H' - F)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_5 = {} & I(3H'' + I''' - 2F' - G'')(K' - C) \\
& - ID'(H''' - F'') \\
& - (3H' - F + 3I'' - 2G')(H + I' - G)(K' - C) \\
& + D'(3H' - F + 3I'' - 2G')(H' - F) \\
& + D(H + I' - G)(H''' - F'') \\
& - D(3H'' + I''' - 2F' - G'')(H' - F)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_6 = {} & I(3H'' + I''' - 2F' - G'')(K'' - C') \\
& - I(D'' + K' - C)(H''' - F'') \\
& - (3H' - F + 3I'' - 2G')(H + I' - G)(K'' - C') \\
& + (3H' - F + 3I'' - 2G')(D'' + K' - C)(H' - F) \\
& + 2D'(H + I' - G)(H''' - F'') \\
& - 2D'(3H'' + I''' - 2F' - G'')(H' - F)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_7 = {} & ID'(K'' - C') \\
& - I(D'' + K' - C)(K' - C) \\
& - D(H + I' - G)(K'' - C') \\
& + D(D'' + K' - C)(H' - F) \\
& + 2D'(H + I' - G)(K' - C) \\
& - 2D'^2(H' - F)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
P_8 = & \, I D' (K''' - C'') \\
& - I (D''' + 2K'' - 2C') (K' - C) \\
& - D (H + I' - G) (K''' - C'') \\
& + D (D''' + 2K'' - 2C') (H' - F) \\
& + (3D'' + K' - C) (H + I' - G) (K' - C) \\
& - D' (3D'' + K' - C) (H' - F)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_9 = & \, I (D'' + K' - C) (K''' - C'') \\
& - I (D''' + 2K'' - 2C') (K'' - C') \\
& - 2D' (H + I' - G) (K''' - C'') \\
& + 2D' (D''' + 2K'' - 2C') (H' - F) \\
& + (3D'' + K' - C) (H + I' - G) (K'' - C') \\
& - (3D'' + K' - C) (D'' + K' - C) (H' - F)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{10} = & \, (H + 2I' - G) (3H'' + I''' - 2F' - G'') (K' - C) \\
& - D' (H + 2I' - G) (H''' - F'') \\
& - (3H' - F + 3I'' - 2G') (2H' + I'' - F - G') (K' - C) \\
& + D' (3H' - F + 3I'' - 2G') (H'' - F') \\
& + D (2H' + I'' - F - G') (H''' - F'') \\
& - D (3H'' + I''' - 2F' - G'') (H'' - F')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{11} = & \, D' (H + 2I' - G) (K'' - C') \\
& - (H + 2I' - G) (D'' + K' - C) (K' - C) \\
& - D (2H' + I'' - F - G') (K'' - C') \\
& + D (D'' + K' - C) (H'' - F') \\
& + 2D' (2H' + I'' - F - G') (K' - C) \\
& - 2D'^2 (H'' - F')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{12} = & \, D' (H + 2I' - G) (K''' - C'') \\
& - (H + 2I' - G) (D''' + 2K'' - 2C') (K' - C) \\
& - D (2H' + I'' - F - G') (K''' - C'') \\
& + D (D''' + 2K'' - 2C') (H' - F') \\
& + (3D'' + K' - C) (2H' + I'' - F - G') (K' - C) \\
& - D' (3D'' + K' - C) (H'' - F')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{13} = & \, D' (3H' - F + 3I'' - 2G') (K'' - C') \\
& - (3H' - F + 3I'' - 2G') (D'' + K' - C) (K' - C) \\
& - D (3H'' + I''' - 2F' - G'') (K'' - C') \\
& + D (D'' + K' - C) (H''' - F'') \\
& + 2D' (3H'' + I''' - 2F' - G'') (K' - C) \\
& - 2D'^2 (H''' - F'')
\end{aligned}$$

$$P_{14} = D(D'' + K' - C)(K''' - C'')$$
$$- D(D''' + 2K'' - 2C')(K'' - C')$$
$$- 2D'^2(K''' - C'')$$
$$+ 2D'(D''' + 2K'' - 2C')(K' - C)$$
$$+ D'(3D'' + K' - C)(K'' - C')$$
$$- (3D'' + K' - C)(D'' + K' - C)(K' - C).$$

Eine ausführliche Discussion der Gleichung (110) gehört zu den praktischen Unmöglichkeiten; wir müssen daher auf eine solche verzichten.

Anmerkung. Zur selben Eliminations-Gleichung kämen wir auch, wenn wir zuerst aus der zweiten und vierten der Gleichungen (106) u'''' eliminiren würden, und dann aus der so gefundenen Eliminations-Gleichung, ferner den übrigen zwei Gleichungen (106) und den zwei Gleichungen (94) die Elimination von u, u', u'', u''' bewerkstelligen würden.

§. 23.

Wir haben im §. 21 die Kriterien aufgefunden, welche nothwendig sind, damit

$$U = \int_{x_1}^{x_2} V dx$$

ein Maximum oder Minimum werde. Es wurde daselbst die Behauptung ausgesprochen, dass

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \text{ und } \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2}$$

für alle Werthe zwischen x_1 und x_2 (diese Grenzwerthe selbst mit eingeschlossen [1]) stets ein und dasselbe Zeichen beibehalten müssen, und dass unter denselben Umständen der Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial z'}\right)^2$$

positiv sei.

Wir wollen nun übergehen zur Discussion der Ausnahmsfälle, und zuerst den Fall besprechen, wo

$$D = 0$$

oder, was dasselbe bedeutet

$$V = \varphi(x, y, y', z) + z'\psi(x, y, y', z)$$

---

[1]) Wir haben diese Bemerkung, als von selbst verständlich, sonst überall weggelassen.

ist (der Fall, wo $B = 0$ ist, lässt sich natürlich eben so behandeln). Man kann alsdann die Glieder der zweiten Ordnung so schreiben:

$$\int_{x_1}^{x_2} B\,(w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2\, dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{I^2}{B}\,(u' + \mu_1 w + \mu_2 u)^2\, dx$$

unter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ die im §. 21 angegebenen Werthe verstanden, und sieht hieraus, dass man in diesem Falle im Allgemeinen weder auf ein Maximum noch auf ein Minimum schliessen kann.

Die Gleichung (110) wird hier viel einfacher, man braucht um sie zu bilden blos u, u', u'' aus folgenden vier Gleichungen zu eliminiren:

$$\begin{aligned}
&Bw'' + Iu'' + B'w' + u'(H + I' - G) + w(E' - A) + \\
&\qquad + u(H' - F) = 0, \\
&Iw'' + w'(G + I' - H) + u(K' - C) + w(G' - F) = 0 \\
&Iw''' + w''(G + 2I' - H) + u'(K' - C) + w'(2G' + I'' - \\
&\qquad - F - H') + u(K'' - C') + w(G'' - F') = 0 \\
&Iw'''' + w'''(G + 3I' - H) + u''(K' - C) + w''(3G' + 3I'' - \\
&\qquad - F - 2H') + u'(2K' - 2C') + w'(3G'' + I''' - 2F' - \\
&\qquad - H'') + u(K'' - C'') + w(G''' - F'') = 0.
\end{aligned}$$

Ordnen wir dieselben genau so, wie wir es vorher gethan haben, so hat man:

	u''	u'	u
$B w'' + B' w' + w(E' - A)$	I	$H + I' - G$	$H' - F$
$I w'' + w'(G + I' - H) + w(G' - F)$	0	0	$K' - C$
$I w''' + w''(G + 2I' - H) + w'(2G' + I'' - F - H') + w(G'' - F')$	0	$K' - C$	$K'' - C'$
$I w'''' + w'''(G + 3I' - H) + w''(3G' + 3I'' - F - 2H') + w'(3G'' + I''' - 2F' - H'') + w(G''' - F'')$	$K' - C$	$2K'' - 2C'$	$K''' - C''$

und die Determinante dieser Ausdrücke gleich Null gesetzt, gibt die Eliminations-Gleichung, die, wenn nicht $I = 0$ oder $K' - C = 0$ ist, von der vierten Ordnung ist. (Die Fälle, wo $D = 0$ und $I = 0$ oder $D = 0$ und $K' - C = 0$ ist, werden wir später zur Sprache bringen.)

§.24.

Betrachten wir nun jenen speciellen Fall, wo

$$BD - I^2 = 0$$

ist. Man wäre hier vielleicht geneigt zu glauben, dass, weil allgemein die Glieder der zweiten Ordnung auf die Form:

$$\left\{ v w^2 + 2 v_1 w u + v_2 u^2 \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} B\,(w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2\, dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{BD - I^2}{B}\,(u' + \mu_1 w + \mu_2 u)^2\, dx$$

gebracht werden konnten, in unserm speciellen Falle, wo $BD - I^2 = 0$ ist, die Glieder der zweiten Ordnung sich so transformiren lassen:

$$\left\{ v w^2 + 2 v_1 w u + v_2 u^2 \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} B\,(w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2\, dx.$$

Aber bei näherem Betracht sieht man, dass dies nicht so ist. Denn, gesetzt den Fall, wir hätten angenommen, dass sich die Glieder der zweiten Ordnung so transformiren liessen, so hätte man zur Bestimmung von v, v_1, v_2, λ_1, λ_2, λ_3 folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A &= v' + B\lambda_1^2 \\
C &= v_2' + B\lambda_3^2 \\
D &= B\lambda_2^2 \\
E &= v + B\lambda_1 \\
F &= v_1' + B\lambda_1 \lambda_3 \\
G &= v_1 + B\lambda_1 \lambda_2 \\
H &= v_1 + B\lambda_3 \\
I &= B\lambda_2 \\
K &= v_2 + B\lambda_2 \lambda_3.
\end{aligned}$$

Aus der vorletzten von ihnen folgt:

$$\lambda_2 = \frac{I}{B}$$

und dies in die dritte Gleichung gesetzt, gilt $BD - I^2 = 0$; es bleiben dann noch sieben Gleichungen zur Bestimmung von den fünf Unbekannten v, v_1, v_2, λ_1, λ_3, was nur in speciellen Fällen, nicht aber allgemein geht.

Werfen wir jetzt einen Blick auf die Gleichung (110). Ihre zwei ersten Glieder werden für $BD - I^2 = 0$ verschwinden, somit

wird die Gleichung (110) nicht mehr von der vierten Ordnung sein, sondern höchstens von der zweiten (ich sage höchstens, weil ja auch das dritte Glied dieser Gleichung für $BD - I^2 = 0$ verschwinden könnte; wenn auch nicht allgemein, so doch in speciellen Fällen; wir wollen jedoch dieses hier nicht voraussetzen, sondern erst später zur Sprache bringen), dies hat zur Folge, dass die Integrale der Gleichungen (93) nur aus zwei Theilen bestehen, es ist nämlich alsdann:

$$w = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} \tag{111}$$
$$u = C_1 \frac{\partial z}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial z}{\partial a_2}$$

und die Folge hiervon ist wieder, dass die Integrale der beiden Differential-Gleichungen (92) blos mit zwei Constanten versehen sind, wir nehmen an, dieselben seien:

$$y = \varphi\,(x, a_1, a_2) \tag{112}$$
$$z = \psi\,(x, a_1, a_2).$$

Und nun setzen wir die Glieder zweiter Ordnung in folgender Form voraus:

$$\int_{x_1}^{x}(Aw^2 + Bw'^2 + Cu^2 + Du'^2 + 2Eww' + 2Fwu + 2Gwu' +$$
$$+ 2Hw'u + 2Iw'u' + 2Kuu')dx = \Big\{vw^2 + 2v_1wu + v_2u^2\Big\}_{x_1}^{x_2} + \tag{113}$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} B(w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} P(w + \mu u)^2 dx;$$

damit nun diese Gleichung identisch stattfinde, muss sein:

$$A = v' + B\lambda_1^2 + P$$
$$C = v'_2 + B\lambda_3^2 + P\mu^2$$
$$D = B\lambda_2^2$$
$$E = v + B\lambda_1$$
$$F = v_1' + B\lambda_1\lambda_3 + P\mu$$
$$G = v_1 + B\lambda_1\lambda_2$$
$$H = v_1 + B\lambda_3$$
$$I = B\lambda_2$$
$$K = v_2 + B\lambda_2\lambda_3$$

daraus folgt:

$$\lambda_2 = \frac{I}{B}$$

diesen Werth in die dritte Gleichung eingeführt, gibt $BD - I^2 = 0$, und in die anderen Gleichungen gesetzt, führt zu nachstehenden Folgerungen:

$$
\begin{aligned}
A &= v' + B\lambda_1^2 + P \\
C &= v_2' + B\lambda_3^2 + P\mu^2 \\
E &= v + B\lambda_1 \\
F &= v_1' + B\lambda_1\lambda_3 + P\mu \\
G &= v_1 + I\lambda_1 \\
H &= v_1 + B\lambda_3 \\
K &= v_2 + I\lambda_3.
\end{aligned}
\tag{114}
$$

In diesen sieben Gleichungen erscheinen sieben Unbekannte, die man so bestimmen könnte:

Aus der 3. von ihnen folgt: $\lambda_1 = \frac{E-v}{B}$

„ „ 5. „ „ „ $v_1 = G - \frac{I}{B}(E-v)$

„ „ 6. „ „ „ $\lambda_3 = \frac{H-G}{B} + \frac{I}{B^2}(E-v)$

„ „ 7. „ „ „ $v_2 = K - \frac{I}{B}(H-G) - \frac{I^2}{B^2}(E-v)$.

Aus der zweiten und vierten Gleichung ergeben sich P und μ, und setzt man die gefundenen Werthe von P und λ_1 in die erste Gleichung, so erhält man eine Differential-Gleichung ersten Grades in v, durch deren Integration in den Resultaten unserer Rechnung, eine Constante auftritt.

Wir werden uns aber die Werthe von $\lambda_1, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ durch andere ganz einfache Betrachtungen verschaffen.

Die Gleichung

$$
\left\{ w \frac{\partial W}{\partial y'} + u \frac{\partial W}{\partial z'} \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ w \left[\frac{\partial W}{\partial y} - \left(\frac{\partial W}{\partial y'} \right)' \right] + u \left[\frac{\partial W}{dz} - \left(\frac{\partial W}{\partial z'} \right)' \right] \right\} dx =
$$

$$
\left\{ v w^2 + 2 v_1 w u + v_2 u^2 \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} B(w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2 dx + \tag{115}
$$

$$
+ \int_{x_1}^{x_2} P(w + \mu u)^2 dx
$$

soll eine identische sein. Das im ersten Theile derselben vorkommende Integral verschwindet, wenn man statt u und v die Ausdrücke in (111) substituirt, also muss durch dieselbe Substitution auch das Integral im zweiten Theile obiger Gleichung verschwinden, d. h. mit anderen Worten, die in (111) stehenden Ausdrücke sind Integrale der zwei linearen Differential-Gleichungen

$$w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u = 0,$$
$$w + \mu u = 0.$$

Setzt man nun:

$$\alpha = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}$$
$$\beta = C_1 \frac{\partial z}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial z}{\partial a_2},$$

so hat man:

$$\alpha' + \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta' + \lambda_3 \beta = 0$$
$$\alpha + \mu \beta = 0.$$

Verbindet man mit diesen Gleichungen noch die, durch Subtraction der fünften und sechsten Gleichungen (114) hervorgehende, nämlich:

$$G - H = I\lambda_1 - B\lambda_3,$$

so kann man die Werthe für λ_1, λ_3 und μ leicht finden. Wirklich ergibt sich aus ihnen:

$$(116) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{\beta (H - G) + B \alpha' + I \beta'}{B \alpha + I \beta} \\ \lambda_3 &= \frac{\alpha (H - G) - I \alpha' - D \beta'}{B \alpha + I \beta} \\ \mu &= -\frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

und nun behaupte ich, dass dies die richtigen Werthe für λ_1, λ_3 und μ sind, d. h. dass es diejenigen Werthe sind, die sich ergeben als Auflösung der Gleichungen (114).

Denn, sind dies die richtigen Werthe für λ_1, λ_3 und μ, so folgt aus den Gleichungen (114) für v, v_1, v_2, P folgendes:

$$v = E - B\lambda_1$$
$$v_1 = G - I\lambda_1 \text{ oder auch } v_1 = H - B\lambda_3$$
$$v_2 = K - I\lambda_3$$
$$P = \frac{1}{\mu}(F - v'_1 - B\lambda_1\lambda_3)$$

und alle diese Werthe müssen den zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} A &= v' + B\lambda_1^2 + P \\ C &= v'_2 + B\lambda_3^2 + P\mu^2 \end{aligned} \tag{117}$$

identisch genügen.

Wir werden nun, um diese Identität nachzuweisen, statt v und v_2 ihre Werthe einführen, und haben:

$$\begin{aligned} A &= E' - B'\lambda_1 - B\lambda'_1 + B\lambda_1^2 + \frac{1}{\mu}(F - v'_1 - B\lambda_1\lambda_3) \\ C &= K' - I'\lambda_3 - I\lambda'_3 + B\lambda_3^2 + \mu\,(F - v'_1 - B\lambda_1\lambda_3), \end{aligned}$$

oder, wenn wir auch statt v_1 seinen Werth setzen:

$$\begin{aligned} A = E' - B'\lambda_1 - B\lambda'_1 + B\lambda_1^2 + \frac{1}{\mu}(F - G' - I'\lambda_1 + \\ + I\lambda_1' - B\lambda_1\lambda_3) \\ C = K' - I'\lambda_3 - I\lambda'_3 + B\lambda_3^2 + \mu\,(F - H' + B'\lambda_3 + \\ + B\lambda_3' - B\lambda_1\lambda_3). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich nun so ordnen:

$$\begin{aligned} -\lambda_1'(B\alpha + I\beta) - \lambda_1(B'\alpha + I'\beta) + B\lambda_1(\lambda_1\alpha + \lambda_3\beta) + \\ + \alpha(E' - A) + \beta(G' - F) = 0 \\ -\lambda_3'(B\alpha + I\beta) - \lambda_3(B'\alpha + I'\beta) + B\lambda_3(\lambda_1\alpha + \lambda_3\beta) + \\ + \alpha(H' - F) + \beta(K' - C) = 0. \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= -\frac{\beta(H' - G') + \beta'(H + I' - G) + \beta'' I + B'\alpha' + B\alpha''}{B\alpha + I\beta} - \\ &\quad - \lambda_1 \frac{B\alpha' + I\beta' + B'\alpha + I'\beta}{B\alpha + I\beta} \\ \lambda_3' &= -\frac{\alpha(G' - H') + \alpha'(G + I' - H) + \alpha'' I + D'\beta' + D\beta''}{B\alpha + I\beta} - \\ &\quad - \lambda_3 \frac{B\alpha' + I\beta' + B'\alpha + I'\beta}{B\alpha + I\beta} \end{aligned}$$

$$\lambda_1\alpha + \lambda_3\beta = -\alpha' - \lambda_2\beta';$$

folglich, wenn wir diese Werthe einführen und gehörig reduciren:

$$\begin{aligned} \alpha(E' - A) + B'\alpha' + B\alpha'' + \beta(H' - F) + \beta'(H + I' - G) + \\ + \beta'' I = 0 \\ \alpha(G' - F) + \alpha'(G + I' - H) + \alpha'' I + \beta(K' - C) + D'\beta' + \\ + D\beta'' = 0 \end{aligned}$$

und das sind wirklich identische Gleichungen, weil $w = \alpha$ und $u = \beta$ den Gleichungen (94) genügen. Ich bemerke noch, dass man P auf folgende Form bringen kann:

$$P = \frac{\beta^2}{\alpha\,(B\alpha + I\beta)} \Big\{ I\,(H' - F) + B\,(C - K') + \\ + \lambda_3 \Big[B\,(G + I' - H) - B'\,I \Big] \Big\}.$$

In dem Falle also, wo $B\,D - I^2 = 0$ ist, erscheinen, wie wir gesehen haben, y und z blos mit zwei Constanten versehen. Die Folge hiervon ist, dass die drei Coordinaten x, y, z der Grenzpunkte der gesuchten Curve, nicht mehr, so wie in den früheren Fällen willkürlich sind, sondern nur zwei derselben, etwa x und y, oder x und z; die dritte Coordinate ist der Bedingung unterworfen, den für y und z gefundenen Gleichungen zu genügen. Da nun hierdurch für die Grenzwerthe $w=0$ und $u=0$ ist, so hat man für die Glieder der zweiten Ordnung folgenden Ausdruck:

$$\int_{x_1}^{x_2} B\,(w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2\,dx + \int_{x^1}^{x_2} P\,(w + \mu u)^2\,dx,$$

in welchem die Grössen $\lambda_1, \lambda_3, P, \mu$ mit einer willkürlichen Constanten $\frac{C_2}{C_1} = m$ behaftet sind.

Die Kriterien für ein Maximum oder Minimum sind hier folgende:

Die zweiten Differential-Quotienten von V dürfen innerhalb der Integrations-Grenzen nicht durch unendlich gehen[1]), ferner muss die Constante m so gewählt werden können, dass weder α noch β noch $B\alpha + I\beta$ für, zwischen x_1 und x_2 liegende Werthe von x gleich Null werde, denn alle drei erscheinen im Nenner der gesuchten Grössen, endlich muss noch P mit B, für das gehörig gewählte m einerlei Zeichen haben, und zwar ebenfalls für alle Werthe von x, von $x = x_1$ bis $x = x_2$.

Bevor wir diesen Paragraph enden, wollen wir noch die Form von V in Betracht ziehen. Aus der partiellen Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'\,\partial z'}\right)^2 = 0$$

---

[1]) Diese in allen Fällen nothwendige Bedingung, wollen wir, als von selbst verständlich, künftig unerwähnt lassen.

folgt:

$$V = \alpha + y' \varphi(\alpha) + z' \psi(\alpha)$$

unter φ und ψ willkürlichen Functionen verstanden, und für α eine Grösse, die aus der Gleichung

$$1 + y' \varphi'(\alpha) + z' \psi'(\alpha) = 0 \qquad (118)$$

zu ziehen ist. Man sieht auch leicht ein, dass man derselben partiellen Differential-Gleichung genügt, für:

$$V = \alpha + y' \varphi(\alpha) + z' \psi(\alpha) + f_1(x, y, z) + y' f_2(x, y, z) + \\ + z' f_3(x, y, z)$$

unter α den früheren Werth und unter f_1, f_2, f_3 willkürliche Functionsformen verstanden. Denn man hat:

$$\frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{\partial \alpha}{\partial y'} + \varphi(\alpha) + y' \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y'} + z' \psi'(\alpha) \frac{\partial a}{\partial y'} + f_2(x, y, z)$$

und wenn man die Gleichung (118) zu Hülfe ruft

$$\frac{\partial V}{\partial y'} = \varphi(\alpha) + f_2(x, y, z),$$

eben so ist auch

$$\frac{\partial V}{\partial z'} = \psi(\alpha) + f_3(x, y, z).$$

Ferner hat man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial a}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial z'} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial z'} = \psi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} = \psi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial z'}.$$

also ist wirklich

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial z'}\right)^2 = 0.$$

§. 25.

Wir haben bisher jene speciellen Fälle behandelt, wo eine der drei Grössen

$$B, \; D, \; BD - I^2$$

gleich Null war; gehen wir jetzt über zur Betrachtung der Fälle, wo zwei der genannten drei Grössen gleich Null sind. Sei also

$$B = 0, \quad D = 0.$$

In diesem Falle ist V linear bezüglich y' und auch bezüglich z', also von der Form

$$V = \varphi_1 (x, y, z) + y' \varphi_2 (x, y, z) + z' \varphi_3 (x, y, z) + \\ + y' z' \varphi_4 (x, y, z).$$

Die Gleichung (110), durch deren Kenntniss wir im Allgemeinen genauen Aufschluss über die Anzahl der in y und z eintretenden Constanten erhalten, wird gebildet durch die Elimination von u aus den vier in § 23 aufgestellten Gleichungen (man hat nur in der ersten derselben $B = 0$ zu setzen), und diese ist von der vierten Ordnung, falls nicht noch $I = 0$ oder $K' - C = 0$ wäre, Fälle die wir jetzt ausser Acht lassen wollen, da wir sie ohnedies später zur Sprache bringen werden.

Da die Gleichung (110) von der vierten Ordnung ist, so erscheinen auch in y und z vier Constante, wir nehmen an, wir hätten gefunden:

$$y = \varphi (x, a_1, a_2, a_3, a_4),$$
$$z = \psi (x, a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Die unter dem Integralzeichen stehenden Glieder der zweiten Ordnung setzen wir hier in folgender Form voraus:

$$A w^2 + C u^2 + 2 E w w' + 2 F w u + 2 G w u' + 2 H w' u + 2 I w' u' + \\ + 2 K u u' = (v w^2 + 2 v_1 w u + v_2 u^2)' + P (w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \\ + \lambda_3 u)^2 + Q (w' + \mu_1 w + \mu_2 u' + \mu_3 u)^2;$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} A &= v' + P \lambda_1^2 + Q \mu_1^2 \\ C &= v_2' + P \lambda_3^2 + Q \mu_3^2 \\ E &= v + P \lambda_1 + Q \mu_1 \\ F &= v_1' + P \lambda_1 \lambda_3 + Q \mu_1 \mu_3 \\ G &= v_1 + P \lambda_1 \lambda_2 + Q \mu_1 \mu_2 \\ H &= v_1 + P \lambda_3 + Q \mu_3 \\ I &= P \lambda_2 + Q \mu_2 \\ K &= v_2 + P \lambda_2 \lambda_3 + Q \mu_2 \mu_3 \\ P &+ Q = 0 \\ P \lambda_2^2 &+ Q \mu_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Aus den zwei letzten Gleichungen hat man:

$$Q = -P$$
$$P(\lambda_2^2 - \mu_2^2) = 0.$$

P kann offenbar nicht Null sein, denn sonst wäre auf $Q = 0$ und die unter dem Integralzeichen stehenden Glieder zweiter Ordnung $= (v w^2 + 2 v_1 w u + v_2 u^2)'$ was nur in sehr speciellen Fällen ist; da wir also P nicht gleich Null annehmen, so muss $\lambda_2^2 - \mu_2^2 = 0$ sein, das heisst entweder $\mu_2 = +\lambda_2$ oder $\mu_2 = -\lambda_2$ das Erste, nämlich $\mu_2 = +\lambda_2$ ist auch nicht annehmbar, weil sonst $I = \lambda_2 (P + Q) = 0$ wäre, was wir ja auch nicht voraussetzen, also muss

$$\mu_2 = -\lambda_2$$

sein; dadurch ist

$$I = 2 \lambda_2 P.$$

Werden diese Werthe in die oben aufgestellten zehn Gleichungen eingeführt, nämlich

$$Q = -P \qquad \mu_2 = -\lambda_2 \qquad \lambda_2 P = \frac{I}{2},$$

so erhält man:

$$A = v' + P(\lambda_1^2 - \mu_1^2)$$
$$C = v_2^1 + P(\lambda_3^2 - \mu_3^2)$$
$$E = v + P(\lambda_1 - \mu_1)$$
$$F = v_1' + P(\lambda_1 \lambda_3 - \mu_1 \mu_3)$$
$$G = v_1 + \frac{I}{2}(\lambda_1 + \mu_1)$$
$$H = v_1 + P(\lambda_3 - \mu_3)$$
$$K = v_2 + \frac{I}{2}(\lambda_3 + \mu_3).$$

In diesen sieben Gleichungen kommen acht Unbekannte vor, wir können daher irgend eine derselben willkürlich wählen, nehmen wir eine der vier Grössen λ_1, λ_3, μ_1, μ_3 gleich Null an, etwa

$$\mu_3 = 0$$

so erhalten wir:

$$(119)\quad \begin{aligned} A &= v' + P(\lambda_1^2 - \mu_1^2) \\ C &= v_2' + P\lambda_3^2 \\ E &= v + P(\lambda_1 - \mu_1) \\ F &= v_1' + P\lambda_1\lambda_3 \\ G &= v_1 + \frac{I}{2}(\lambda_1 + \mu_1) \\ H &= v_1 + P\lambda_3 \\ K &= v_2 + \frac{I}{2}\lambda_3. \end{aligned}$$

Aus der 3ten, 5ten, 6ten und 7ten Gleichung ergibt sich:

$$(120)\quad \begin{aligned} v_1 &= G - \frac{I}{2}(\lambda_1 + \mu_1) \\ P &= \frac{1}{\lambda_3}\left[H - G + \frac{I}{2}(\lambda_1 + \mu_1)\right] \\ v_2 &= K - \frac{I}{2}\lambda_3 \\ v &= E + \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\lambda_3}\left[H - G + \frac{I}{2}(\lambda_1 + \mu_1)\right] \end{aligned}$$

und werden diese Werthe in die 1te, 2te und 4te Gleichung gesetzt, so erhält man drei Differential-Gleichungen der ersten Ordnung, aus denen man λ_1, μ_1 und λ_3 bestimmen soll.

Setzen wir nun für $\alpha_1\ \beta_1$, $\alpha_2\ \beta_2$ Ausdruck voraus, ganz von derselben Form wie die im §. 21 vorausgesetzten, so sind diese Ausdrücke Functionen von x, welche respective statt w und u in den Gleichungen:

$$(121)\quad \begin{aligned} Iu'' + u'(H + I' - G) + w(E' - A) + u(H' - F) &= 0 \\ Iw'' + w'(G + I' - H) + u(K' - C) + w(G' - F) &= 0 \end{aligned}$$

gesetzt, dieselben in identische verwandeln, sucht man dann aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1' + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1' + \lambda_3\beta_1 &= 0 \qquad & \alpha_1' + \mu_1\alpha_1 + \mu_2\beta_1' &= 0 \\ \alpha_2 + \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2' + \lambda_3\beta_2 &= 0 \qquad & \alpha_2' + \mu_1\alpha_2 + \mu_2\beta_2' &= 0 \end{aligned}$$

λ_1, λ_3, μ_1 und μ_2, so behaupte ich, dass die so gefundenen Werthe die richtigen sind. Wir haben aus ihnen

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_2'\beta_1 - \alpha_1'\beta_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} + \lambda_2 \frac{\beta_1\beta_2' - \beta_1'\beta_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

$$\lambda_3 = \frac{\alpha_2\alpha_1' - \alpha_1\alpha_2'}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} + \lambda_2 \frac{\alpha_2\beta_1' - \alpha_1\beta_2'}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

$$\mu_1 = \frac{\alpha_2'\beta_1' - \alpha_1'\beta_2'}{\alpha_1\beta_2' - \alpha_2\beta_1'}$$

$$\mu_2 = \frac{\alpha_2\alpha_1' - \alpha_1\alpha_2'}{\alpha_1\beta_2' - \alpha_2\beta_1'}$$

und wenn wir die in §. 21 eingeführten Bezeichnungen ferner beibehalten, und zugleich nicht ausser Acht lassen, dass $\lambda_2 = -\mu_2$ ist, so hat man:

$$\lambda_1 = -\frac{M_2}{M_1} + \frac{M_4 M_5}{M_1 M_3}$$

$$\lambda_3 = -2\frac{M_4}{M_1}$$

$$\mu_1 = -\frac{M_6}{M_3}$$

$$\mu_2 = -\frac{M_4}{M_3};$$

ferner ist:

$$\lambda_1 + \mu_1 = \frac{M_4 M_5 - M_2 M_3 - M_1 M_6}{M_1 M_3} = -2\frac{M_2}{M_1}$$

$$\lambda_1 - \mu_1 = \frac{M_4 M_5 - M_2 M_3 + M_1 M_6}{M_1 M_3} = 2\frac{M_4 M_5}{M_1 M_3},$$

folglich hat man, diese Werthe in die Gleichungen (120) einführend:

$$v_1 = G + I\frac{M_2}{M_1}$$

$$P = \frac{1}{2 M_4}\left[M_1 (G - H) + I M_2\right]$$

$$v_2 = K + I\frac{M_4}{M_1}$$

$$v = E - \frac{M_5}{M_1 M_3}\left[M_1 (G - H) + I M_2\right]$$

und nun sollen, wenn die aufgestellten Werthe von λ_1, λ_3, μ_1, μ_2 die richtigen sind, folgende Gleichungen identische sein:

$$A = v' + P(\lambda_1^2 - \mu_1^2)$$

$$C = v_2' + P\lambda_3^2$$

$$F = v_1' + P\lambda_1\lambda_3.$$

Führen wir statt $P, \lambda_1, \lambda_3, \mu_1$ ihre Werthe ein, so haben wir:

$$\begin{aligned} A &= v' - 2\frac{M_2 M_5}{M_1^2 M_3}[M_1(G-H) + I M_2] \\ C &= v_2' + 2\frac{M_4}{M_1^2}[M_1(G-H) + I M_2] \qquad (122) \\ F &= v_1' + [M_1(G-H) + I M_2]\frac{M_2 M_3 - M_4 M_5}{M_1^2 M_3}. \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} v' = E' &- \frac{M_5}{M_1 M_3}[(M_2 + M_3)(G-H) + M_1(G'-H') + \\ &+ I' M_2 + I(M_6 + M_7)] + \\ &+ \frac{M_1 M_5 M_6 + M_1 M_5 M_8 + M_2 M_3 M_5 + M_3^2 M_5 - M_1 M_3 M_{10}}{M_1^2 M_3^2}[M_1(G- \\ &- H) + I M_2] \end{aligned}$$

$$v_1' = G' + I'\frac{M_2}{M_1} + I\frac{M_1 M_7 - M_2^2 + M_4 M_5}{M_1^2}$$

$$v_2' = K' + I'\frac{M_4}{M_1} + I\frac{M_1 M_9 - M_2 M_4 - M_3 M_4}{M_1^2}.$$

folglich

$$\begin{aligned} A = E' &- \frac{M_5}{M_1 M_3}[(M_2 + M_3)(G-H) + M_1(G'-H') + I' M_2 + \\ &+ I(M_6 + M_7)] + \frac{M_4 M_5^2 + M_1 M_5 M_8 + M_3^2 M_5 - M_1 M_3 M_{10}}{M_1^2 M_3^2}[M_1(G- \\ &- H) + I M_2] \\ C = K' &+ I'\frac{M_4}{M_1} + I\frac{M_1 M_9 + M_2 M_4 - M_3 M_4}{M_1^2} + 2\frac{M_4}{M_1}(G-H) \qquad (123) \\ F = G' &+ I'\frac{M_2}{M_1} + I\frac{M_1 M_3 M_7 + M_3 M_4 M_5 - M_2 M_4 M_5}{M_1^2 M_3} + \\ &+ \frac{M_2 M_3 - M_4 M_5}{M_1 M_3}(G-H). \end{aligned}$$

Wir wollen nun diese Gleichungen dadurch vereinfachen, dass wir statt $-A + E'$, $-C + K'$, $-F + G'$ ihre, ihnen identisch gleichen, in (102) angegebenen Werthe setzen, in denen man aber B und D gleich Null zu setzen hat. Diese sind daher:

$$\begin{aligned} -A + E' &= \quad I\frac{M_{10}}{M_1} + (H + I' - G)\frac{M_5}{M_1} \\ -C + K' &= -I\frac{M_9}{M_1} - (G + I' - H)\frac{M_4}{M_1} \\ -F + G' &= -I\frac{M_7}{M_1} - (G + I' - H)\frac{M_2}{M_1}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (123) werden dadurch:

$$-\frac{M_5}{M_3}(G' - H') + I' \frac{M_5 (M_3 - M_2)}{M_1 M_3} +$$
$$+ (G - H) \cdot \frac{M_4 M_5^2 + M_1 M_5 M_8 - M_1 M_3 M_{10} - M_2 M_3 M_5 - M_3^2 M_5}{M_1 M_3^2} +$$
$$+ I \cdot \frac{M_2 M_4 M_5^2 + M_1 M_2 M_5 M_8 - M_1 M_2 M_3 M_{10} + M_1 M_3^2 M_{10} - M_1 M_3 M_5 M_7 - M_3 M_4 M_5^2}{M_1^2 M_3^2} = 0$$

$$\frac{M_4}{M_1^2}[M_1 (G - H) + I (M_2 - M_3)] = 0$$

$$-\frac{M_4 M_5}{M_1^2 M_3}[M_1 (G - H) + I (M_2 - M_3)] = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen lässt sich auch so schreiben:

$$-\frac{M_5}{M_1 M_3}[M_1 (G - H) + I (M_2 - M_3)]' +$$
$$+ \frac{M_4 M_5^2 + M_1 M_5 M_8 - M_1 M_3 M_{10}}{M_1^2 M_3^2}[M_1 (G - H) + I (M_2 - M_3)] = 0$$

und nun sieht man, dass allen dreien genügt wird, wenn

$$M_1 (G - H) + I (M_2 - M_3) = 0 \qquad (124)$$

ist. Differenzirt man dieselbe, so hat man:

$$(M_2 + M_3)(G - H) + M_1 (G' - H') + I' (M_2 - M_3) + \\ + I (M_7 - M_8) = 0. \qquad (125)$$

Diese Gleichung ist aber eine identische, denn sie ist eine unmittelbare Folge der zwei identischen Gleichungen:

$$I M_7 + (G + I' - H) M_2 + (G' - F) M_1 = 0$$
$$I M_8 + (H + I' - G) M_3 + (H' - F) M_1 = 0.$$

Da nun die Gleichung (125) identisch stattfindet, so muss das Integral derselben einer Constanten gleich sein, in unserm Falle ist die Constante gleich Null. Und nun lässt sich die Analyse genau so führen, wie wir sie im §. 21 geführt haben. Wir haben demnach:

$$\int_{x_1}^{x_2} (A w^2 + C u^2 + 2 E w w' + 2 F w u + 2 G w u' + 2 H w' u +$$
$$+ 2 I w' u' + 2 K u u') \, dx = \Big\{ v w^2 + 2 v_1 w u + v_2 u^2 \Big\}_{x_1}^{x_2} + \qquad (126)$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} P (w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2 \, dx - \int_{x_1}^{x_2} P (w' + \mu_1 w - \lambda_2 u')^2 \, dx$$

wo, unter Berücksichtigung der Gleichung (124) $v, v_1, v_2, P, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und μ_1 folgende Bedeutungen haben:

$$v = E - I\frac{M_5}{M_1}$$

$$v_1 = G + I\frac{M_2}{M_1}$$

$$v_2 = K + I\frac{M_4}{M_1}$$

$$P = \frac{I}{2}\,\frac{M_3}{M_4}$$

$$\lambda_1 = -\frac{M_2}{M_1} + \frac{M_4 M_5}{M_1 M_3}$$

$$\lambda_2 = \frac{M_4}{M_3}$$

$$\lambda_3 = -2\frac{M_4}{M_1}$$

$$\mu_1 = -\frac{M_6}{M_3}.$$

$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ haben die im §. 21 angegebenen Werthe, in denen die sechs Constanten $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ auftreten, zwischen denen folgende zwei Relationen stattfinden:

$$C_1 C_6 - C_2 C_5 + C_3 C_4 = 0$$
$$M_1 (G - H) + I (M_2 - M_3) = 0.$$

Da ferner blos die Quotienten

$$\frac{C_2}{C_1},\ \frac{C_3}{C_1},\ \frac{C_4}{C_1},\ \frac{C_5}{C_1},\ \frac{C_6}{C_1}$$

erscheinen, so kann man sagen, dass in den Resultaten unserer Rechnung drei willkürliche Constante eintreten, und dass sie somit die nothwendige Allgemeinheit haben.

Aus der Gleichung (124) sieht man, dass man in diesem Falle im Allgemeinen, weder auf ein Maximum, noch auf ein Minimum schliessen kann.

§. 26.

Sei jetzt

$$D = 0,\ BD - I^2 = 0$$

oder, was dasselbe ist:

$$D = 0,\ I = 0.$$

Weil $D = 0$ ist, muss V linear bezüglich z' sein, also von der Form

$$V = \varphi\,(x, y, y', z) + z'\psi\,(x, y, y', z);$$

nun soll aber noch $I = 0$ sein, d. h. $\dfrac{d\psi}{\partial y'} = 0$ oder $\psi =$ einer Function von x, y, z. Wir haben daher in diesem Falle

$$V = \varphi\,(x, y, y', z) + z'\psi\,(x, y, z)$$

unter φ und ψ willkürliche Functionen verstanden. Die zwei Gleichungen (94) sind hier:

$$Bw'' + B'w' + u'(H - G) + w(E' - A) + u(H' - F) = 0$$
$$w'(G - H) + u(K' - C) + w(G' - F) = 0$$

und differenzirt man die letzte von ihnen, so hat man

$$w''(G - \quad) + u'(K' - C) + w'(2G' - F - \quad') + u(K'' - C') +$$
$$+ w(G'' - F') = 0.$$

Durch Elimination von u und u' aus diesen drei Gleichungen erhält man jene Gleichung, die aus (110) hervorgeht, wenn man in derselben $D = 0$ und $I = 0$ setzt.

Ordnet man obige drei Gleichungen, so hat man:

	u'	u
$Bw'' + B'w' + w(E' - A)$	$H - G$	$H' - F$
$w'(G - H) + w(G' - F)$	0	$K' - C$
$w''(G - H) + w'(2G' - F - H') +$ $+ w(G'' - F')$	$K' - C$	$K'' - C'$

und die Determinante hieraus gibt die Eliminations-Gleichung. Sie ist im Allgemeinen von der zweiten Ordnung, und da der Factor von w'' gleich

$$-(K' - C)\,[B(K' - C) + (G - H)^2]$$

ist, so findet nur dann eine Ausnahme hiervon Statt, wenn entweder $K' - C = 0$ oder $B(K' - C) + (G - H)^2 = 0$ ist; Fälle, die wir einstweilen unbeachtet lassen.

Unsere Analyse ist nun von der im §. 24 geführten gar nicht verschieden, nur wird, weil $I = 0$ ist, $\lambda_2 = 0$, und es ist daher:

$$\int_{x_1}^{x_2} (A w^2 + B w'^2 + C u^2 + 2 E w w' + 2 F w u + 2 G w u' + $$
$$+ 2 H w' u + 2 K u u') \, dx = \Big\{ v w^2 + 2 v_1 w u + v_2 u^2 \Big\}_{x}^{x_2} +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} B (w' + \lambda_1 w + \lambda_3 u)^2 \, dx + \int_{x_1}^{x_2} P (w + \mu u)^2 \, dx,$$

wo λ_1, λ_3, μ, v, v_1, v_2 und P Bedeutungen haben, die man aus denen im §. 24 gefundenen ableitet, wenn man in denselben $D = 0$, $I = 0$ setzt, man hat daher:

$$\alpha = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}$$
$$\beta = C_1 \frac{\partial z}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial z}{\partial a_2}$$
$$\lambda_1 = - \frac{\beta (H - G) + B \alpha'}{B \alpha}$$
$$\lambda_3 = \frac{H - G}{B}$$
$$\mu = - \frac{\alpha}{\beta}$$
$$v = E + \frac{\beta (H - G) + B \alpha'}{\alpha}$$
$$v_1 = G$$
$$v_2 = K$$
$$P = - \frac{\beta}{\alpha} \left\{ F - G' + \frac{(H - G) [\beta (H - G) + B \alpha']}{B \alpha} \right\}.$$

Der Werth von P lässt sich noch auf eine andere Weise darstellen. Macht man nämlich Gebrauch von der Gleichung:

$$\alpha' (G - H) + \beta (K' - C) + \alpha (G' - F) = 0,$$

so hat man

$$P = - \frac{\beta^2}{B \alpha^2} [B (K' - C) + (G - H)^2].$$

Die Kriterien für ein Maximum oder Minimum hängen daher in diesem Falle von folgenden Umständen ab:

Erstens, es muss die Constante $\frac{C_2}{C_1} = m$ so gewählt werden können, dass weder α noch β für zwischen x_1 und x_2 liegende Werthe von x gleich Null wird.

Zweitens, hat man m so gewählt, so muss P und B für alle zwischen x_1 und x_2 liegenden Werthe noch gleichbezeichnet sein. Sind dann beide positiv, so hat man, wenn für die Grenzen w und u gleich Null sind, ein Minimum, sind sie aber beide negativ, ein Maximum. Sollten B und I gleich Null sein, so lässt sich natürlich die Analyse auf ganz analoge Weise führen.

§. 27.

Jetzt betrachten wir den Fall, wo

$$B = 0, \ D = 0, \ I = 0$$

ist, wo also V die Form hat:

$$V = \varphi_1 (x, y, z) + y' \varphi_2 (x, y, z) + z' \varphi_3 (x, y, z).$$

Obwohl dies ein specieller Fall der früher betrachteten Fälle ist, sind wir doch genöthigt die Untersuchung von vorn zu beginnen, denn wollten wir etwa in dem zuletzt behandelten Falle, wo $D = 0$, $I = 0$ ist, auch $B = 0$ annehmen, so würden λ_1, λ_3, P Brüche werden, deren Nenner Null sind, d. h. λ_1, λ_3, P sind entweder unendlich oder unbestimmt. Die Analyse deutet damit an, dass die Transformation der Glieder der zweiten Ordnung auf eine andere Art bewerkstelligt werden muss. Wir setzen also, genau so wie im §. 25 vorgehend:

$$\begin{aligned} Aw^2 + Cu^2 + 2Eww' + 2Fwu + 2Gwu' + 2Hw'u + 2Kuu' = \\ = (vw^2 + 2v_1 wu + v_2 u^2)' + P(w' + \lambda_1 w + \lambda_2 u' + \lambda_3 u)^2 + \\ + Q(w' + \mu_1 w + \mu_2 u' + \mu_3 u)^2 \end{aligned}$$

und haben dadurch:

$$\begin{aligned} A &= v' + P\lambda_1^2 + Q\mu_1^2 \\ C &= v_2' + P\lambda_3^2 + Q\mu_3^2 \\ E &= v + P\lambda_1 + Q\mu_1 \\ F &= v_1' + P\lambda_1\lambda_3 + Q\mu_1\mu_3 \\ G &= v_1 + P\lambda_1\lambda_2 + Q\mu_1\mu_2 \end{aligned}$$

$$H = v_1 + P\lambda_3 + Q\mu_3$$
$$K = v_2 + P\lambda_2\lambda_3 + Q\mu_2\mu_3$$
$$P + Q = 0$$
$$P\lambda_2^2 + Q\mu_2^2 = 0$$
$$P\lambda_2 + Q\mu_2 = 0.$$

Die drei letzten Gleichungen lassen sich auch so schreiben:

$$Q = -P$$
$$P(\lambda_2^2 - \mu_2^2) = 0$$
$$P(\lambda_2 - \mu_2) = 0.$$

Die zwei letzten werden erfüllt, sowohl für $P = 0$, als auch für $\lambda_2 = \mu_2$; $P = 0$ setzen wir nicht voraus, weil sonst auch Q gleich Null sein müsste, und die Glieder der zweiten Ordnung gleich

$$(v w^2 + 2v_1 w u + v_2 u^2)'$$

wären, was nur in sehr speciellen Fällen ist, wir setzen also

$$\lambda_2 = \mu_2.$$

Dies in obigen Gleichungen eingeführt, gibt uns:

$$A = v' + P(\lambda_1^2 - \mu_1^2)$$
$$C = v_2' + P(\lambda_3^2 - \mu_3^2)$$
$$E = v + P(\lambda_1 - \mu_1)$$
$$F = v_1' + P(\lambda_1\lambda_3 - \mu_1\mu_3)$$
$$G = v_1 + P\lambda_2(\lambda_1 - \mu_1)$$
$$H = v_1 + P(\lambda_3 - \mu_3)$$
$$K = v_2 + P\lambda_2(\lambda_3 - \mu_3).$$

In diesen sieben Gleichungen kommen neun Unbekannte vor, wir wählen daher

$$\mu_1 = 0, \quad \lambda_3 = 0$$

und haben dann

$$(127) \quad \begin{aligned} A &= v' + P\lambda_1^2 \\ C &= v_2' - P\mu_3^2 \\ E &= v + P\lambda_1 \\ F &= v_1' \\ G &= v_1 + P\lambda_1\lambda_2 \\ H &= v_1 - P\mu_3 \\ K &= v_2 - P\lambda_2\mu_3. \end{aligned}$$

Die zwei Gleichungen (94) sind hier

$$\begin{aligned} u'(H-G)+w(E'-A)+u(H'-F)&=0\\ w'(G-H)+u(K'-C)+w(G'-F)&=0, \end{aligned} \tag{128}$$

verbindet man mit denselben noch die Gleichung

$$w''(G-H)+u'(K'-C)+w'(2G'-F-H')+u(K''-C')+\\ +w(G''-F')=0$$

und eliminirt man aus allen dreien u und u', so erhält man eine Gleichung in w, die von der zweiten Ordnung ist, falls nicht $K-C=0$ oder $G-H=0$ ist. Setzt man die beiden letzten Fälle nicht voraus, so sind die Integrale der Gleichungen (128) von der Form:

$$\begin{aligned} w&=C_1\frac{\partial y}{\partial a_1}+C_2\frac{\partial y}{\partial a_2}\\ u&=C_1\frac{\partial z}{\partial a_1}+C_2\frac{\partial z}{\partial a_2}; \end{aligned}$$

wir wollen dieselben mit α und β bezeichnen. Setzen wir nun:

$$\begin{aligned} \alpha'+\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta'&=0\\ \alpha'+\lambda_2\beta+\mu_3\beta&=0, \end{aligned} \tag{129}$$

so haben wir, wenn wir diese Gleichungen mit den fünf letzten Gleichungen (127) verbinden

$$\begin{aligned} v_1&=\int F\,dx\\ \lambda_1&=\frac{\alpha\beta'(G-v_1)-\alpha'\beta(H-v_1)}{\alpha\beta(H-v_1)}\\ \lambda_3&=-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{G-v_1}{H-v_1}\\ \mu_3&=\frac{\alpha\beta'(G-v_1)-\alpha'\beta(H-v_1)}{\beta^2(H-v_1)}\\ P&=\frac{\beta^2(H-v_1)^2}{\alpha'\beta(H-v)-\alpha\beta'(G-v_1)}\\ v&=E+\frac{\beta}{\alpha}(H-v_1)\\ v_2&=K+\frac{\alpha}{\beta}(G-v_1). \end{aligned}$$

Wir behaupten nun, dass dies die richtigen Werthe für $\lambda_1, \lambda_2, \mu_3, P, v, v_1, v_2$ sind, nämlich sie haben die Eigenschaft den Gleichungen

(127) identisch zu genügen. Dass sie den letzten fünf Gleichungen (127) genügen, ist von selbst klar, denn diese wurden ja benützt bei der Bestimmung derselben; es ist daher blos zu zeigen, dass die beiden Gleichungen

$$A = v' + P\lambda_1{}^2$$
$$C = v_2' - P\mu_3{}^2$$

hierfür erfüllt werden. Zu dem Behufe setze man in denselben statt $v, v_2, \lambda_1, \mu_3, P$ ihre Werthe, so erhält man nach einigen Reductionen:

$$\beta' (H - G) + \alpha (E' - A) + \beta (H' - F) = 0$$
$$\alpha' (G - H) + \beta (K' - C) + \alpha (G' - F) = 0,$$

was in Folge der Gleichungen (128) wirklich wahr ist.

Wir haben daher:

$$\int_{x_1}^{x_2} (Aw^2 + Cu^2 + 2Eww' + 2Fwu + 2Gwu' + 2Hw'u + 2Kuu') dx =$$
$$\left\{vw^2 + 2v_1 wu + v_2 u^2\right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x}^{x_2} P(w' + \lambda_1 w + \lambda_1 u')^2 dx -$$
$$- \int_{x_1}^{x_2} P(w' + \lambda_2 u' + \mu_3 u)^2 dx$$

woraus man im Allgemeinen weder auf ein Maximum noch auf ein Minimum schliessen kann.

§. 28.

Ist aber nebstdem, dass

$$B = 0, \; D = 0, \; I = 0,$$

noch

$$G = H$$

so hören die Gleichungen (94) auf, Differential-Gleichungen zu sein, und die ganze Analyse ist daher von der eben jetzt geführten, wesentlich verschieden. Um zuerst die Form von V zu bestimmen, bemerken wir, dass, weil $B = 0$, $D = 0$, $I = 0$ ist, man hat

$$V = \varphi_1 (x, y, z) + y' \varphi_2 (x, y, z) + z' \varphi_3 (x, y, z)$$

und weil $G = H$, oder was dasselbe ist $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z'} = \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial z}$ ist, hat man:

$$\frac{\partial \varphi_2 (x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_3 (x, y, z)}{\partial y}$$

somit ist

$$V = \varphi\,(x, y, z) + [\psi\,(x, y, z)]'.$$

Die Werthe von y und z, welche U zu einem Grössten oder Kleinsten machen, ergeben sich hier aus den beiden gewöhnlichen Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi\,(x, y, z)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi\,(x, y, z)}{\partial z} = 0.$$

Die Folge hiervon ist, dass man hier blos die Abscissen der Endpunkte willkürlich annehmen kann, nicht aber eine oder beide ihrer andern Coordinaten, wie wir es in den früheren Fällen thun konnten, wo uns die Wahl der zwei Constanten a_1 und a_2 oder gar die Wahl der vier Constanten a_1, a_2, a_3, a_4 zur beliebigen Verfügung stand.

Wir setzen hier:

$$A w^2 + C u^2 + 2\,E w w' + 2\,F\,w u + 2\,G w u' + 2\,G w' u + 2\,K u u' =$$
$$(v\,w^2 + 2\,v_1\,w\,u + v_2\,u^2)' + P\,(w + \lambda\,u)^2 + Q\,u^2$$

und folgern daraus

$$\begin{aligned} A &= v' + P \\ C &= v_2' + P\lambda^2 + Q \\ E &= v \\ F &= v_1' + P\lambda \\ G &= v_1 \\ K &= v_2 \end{aligned}$$

somit ist umgekehrt:

$$\begin{aligned} v &= E \\ v_1 &= G \\ v_2 &= K \\ P &= A - E \\ \lambda &= \frac{F - G'}{A - E'} \\ Q &= \frac{(A - E')\,(C - K') - (F - G')^2}{A - E'}. \end{aligned}$$

Es ist also:

$$\int_{x_1}^{x_2} (A w^2 + C u^2 + 2\,E w w' + 2\,F w u + 2\,G w u' + 2\,G w' u + 2\,K u u')\,dx =$$
$$\Big\{ + E w^2 \;\; 2\,G\,w\,u + K\,u^2 \Big\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} (A - E')\left(w + \frac{F - G'}{A - E'}\,u\right)^2 dx +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} \frac{(A - E')\,(C - K') - (F - G')^2}{A - E'}\;u^2\,\partial x$$

Nimmt man an, dass für die Grenzen $w = 0$, $u =$ ist, so hat man als Kennzeichen für ein Maximum:

$$A - E' < 0,\; C - K' < 0 \text{ und } (A - E')(C - K') - (F - G')^2 > 0.$$

und für ein Minimum

$$A - E' > 0,\; C - K' > 0 \text{ und } (A - E')(C - K') - (F - G')^2 > 0.$$

Wäre aber

$$(A - E')\, C - K') - (F - G')^2 = 0,$$

so reicht hin, dass für ein Maximum

$$A - E' < 0$$

und für ein Minimum

$$A - E' > 0$$

ist, und zwar für alle zwischen x_1 und x_2 liegenden Werthe von x.

Die Form von V ergibt sich alsdann durch Elimination von α aus:

$$V = \alpha + y\,\varphi(\alpha) + z\,\psi(\alpha) + [\chi(x, y, z)]'$$
$$1 + y\,\varphi'(\alpha) + z\,\psi'(\alpha) = 0,$$

wo φ, ψ, χ willkürliche Functionen sind. Die Gleichungen zur Bestimmung von y und z sind hier

$$\varphi(\alpha) = 0,\; \psi(\alpha) = 0,$$

woraus

$$y = C_1,\; z = C_2$$

folgt, und C_1 und C_2 constante Zahlen verstanden.

§. 29.

Sollte noch nebst den Gleichungen

$$B = 0,\; D = 0,\; I = 0,\; G = H$$

die Gleichung

$$A = E'$$

bestehen, so wäre

$$V = \varphi(x, z) + y\,\psi(x, z) + [\chi(x, y, z)]'$$

und man kann dann setzen:

$$E' w^2 + Cu^2 + 2Eww' + 2Fwu + 2Gwu' + 2Gw'u + 2Kuu' = (vw^2 + 2v_1wu + v_2u^2)' + P(w + \lambda u)^2 + Qw^2.$$

Dadurch ist

$$\begin{aligned} E' &= v' + P + Q \\ C &= v_2' + P\lambda^2 \\ E &= v \\ F &= v_1' + P\lambda \\ G &= v_1 \\ K &= v_2 \end{aligned}$$

oder umgekehrt

$$\begin{aligned} v &= E \\ v_1 &= G \\ v_2 &= K \\ \lambda &= \frac{C - K'}{F - G'} \\ P &= \frac{(F - G')^2}{C - K'} \\ Q &= -\frac{(F - G')^2}{C - K'} \,. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\int_{x_1}^{x_2} (E' w^2 + Cu^3 + 2\, E w w' + 2\, F w u + 2\, G w u' + 2\, G w' u + \\ + 2\, K u u')\, dx =$$

$$\Big\{ E w^2 + 2\, G w u + K u^2 \Big\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{(F - G')^2}{C - K'} \left(w + \frac{C - K'}{F - G'}\, u\right)^2 dx - \\ - \int_{x_1}^{x_2} \frac{(F - G')^2}{C - K'}\, w^2\, dx$$

und man hat daher im Allgemeinen weder ein Maximum noch ein Minimum. Wäre noch nebstdem $F = G'$ mithin

$$B = D = I = 0, \ G = H, \ A = E', \ F = G',$$

so hätte man

$$V = \varphi(x, z) + y\, \psi(x) + [\chi(x, y, z)]'$$

und

$$\int_{x_1}^{x_2} (E' w^2 + Cu^2 + 2\, E w w' + 2\, G' w u + 2\, G w u' + 2\, G w' u + \\ + 2\, K u u')\, dx =$$

$$\Big\{ E w^2 + 2\, G w u + K u^2 \Big\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_2} (C - K')\, u^2\, dx.$$

Ein Maximum oder Minimum findet da Statt, wenn $C - K'$ innerhalb der Integrationsgrenzen stets negativ oder stets positiv ist.

Wäre hingegen

$$B = D = I = 0,$$
$$G = H,\ A = E',\ C = K',$$

so hätte man:

$$V = y\,\varphi(x) + z\,\psi(x) + [\chi(x, y, z)]';$$

in diesem Falle lässt sich gar kein Werth für y oder z finden, welcher U zu einem Maximum oder Minimum macht. Was endlich den letzten Fall anbelangt, wo $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ ist, mithin

$$V = [F(x, y, z)]', \text{ und } U = F(x, y, z)$$

ist, da hat man zur Bestimmung von y und z die zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Setzt man die hieraus sich ergebenden Werthe von y und z in

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\,\delta y^2 + 2\,\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}\,\delta y\,\delta z + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\,\delta z^2,$$

so hat man ein Maximum oder Minimum für jene speciellen Werthe von x, welche diesen Ausdruck negativ oder positiv machen.

§. 30.

Wir haben am Schlusse des §. 23 versprochen jenen Fall zu discutiren, wo

$$D = 0 \text{ und } K' - C = 0$$

ist. Die zwei Gleichungen (94) nehmen hier folgende Form an:

$$B w'' + I u'' + B' w' + u'(H + I' - G) + w(E' - A) + u(H' - F) = 0$$
$$I w'' + w'(G + I' - H) + w(G' - F) = 0;$$

u lässt sich in diesem Falle aus beiden Gleichungen nicht eliminiren. Aber man hat aus der zweiten Gleichung

$$w = A_1\,\frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial y}{\partial a_2}$$

und dies in die erste Gleichung substituirt, gibt

$$u = A_1\,\frac{\partial z}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial z}{\partial a_2} + A_3\,\frac{\partial z}{\partial a_3} + A_4\,\frac{\partial z}{\partial a_4}.$$

Man wird also hier ganz denselben Weg wie in §. 23 einzuschlagen haben, und nur die Berechnung von M_1, M_2, M_3, M_4 wird sich einfacher führen lassen, weil $\frac{\partial y}{\partial a_3} = 0$ und $\frac{\partial y}{\partial a_4} = 0$ ist.

Die Integrale der Gleichungen (92) werden sein:

$$y = \varphi\,(x, a_1, a_2)$$
$$z = \psi\,(x, a_1, a_2, a_3, a_4).$$

In §. 25 haben wir den Fall unerörtert gelassen, wo

$$B = 0\,,\ D = 0\,,\ K' - C = 0$$

ist, allein hier lässt sich die oben gemachte Bemerkung Wort für Wort wiederholen, und sollte auch $E' - A = 0$ sein, so würden auch $\frac{\partial z}{\partial a_1} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial a_2} = 0$ sein.

In §. 26 haben wir zwei Fälle unerörtert gelassen, erstens wo

$$D = 0\,,\ I = 0\,,\ K' - C = 0$$

ist. Da hat man aber:

$$B\,w'' + B'\,w' + u'\,(H - G) + w\,(E' - A) + u\,(H' - F) = 0$$
$$w'\,(G - H) + w\,(G' - F) = 0,$$

somit

$$w = C_1\,\frac{\partial y}{\partial a_1}$$
$$u = C_1\,\frac{\partial z}{\partial a_1} + C_2\,\frac{\partial z}{\partial a_2}$$

und folglich

$$y = \varphi\,(x, a_1)$$
$$z = \psi\,(x, a_1\ a_2),$$

zweitens wo

$$D = 0,\ I = 0\,,\ B\,(K' - C) + (G - H)^2 = 0$$

ist. Da hat man für die Glieder der zweiten Ordnung folgende Form:

$$\Big\{v w^2 + 2 v_1\,w u + v_2\,u^2\Big\}_{x^1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} B\,(w' + \lambda_1 w + \lambda_3\,u)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} Q w^2\,dx.$$

Zur Bestimmung von v, v_1, v_2, λ_1. λ_3, P dienen die Gleichungen:

$$A = v' + B\,\lambda_1^2 + Q$$
$$C = v_2' + B\,\lambda$$
$$E = v + B\,\lambda_1$$
$$F = v_1' + B\,\lambda_1\,\lambda_3$$
$$G = v_1$$
$$H = v_1 + B\,\lambda_3$$
$$K = r_2$$

Aus ihnen folgen:

$$v_1 = G$$
$$v_2 = K$$
$$\lambda_3 = \frac{H-G}{B}$$
$$\lambda_1 = \frac{F-G'}{H-G}$$
$$v = \frac{E(H-G) - B(F-G')}{H-G}$$
$$Q = A - E' + B'\frac{F-G'}{H-G} + B\frac{(H-G)(F'-G'') - (F-G')(H'-G') - (F-G')^2}{(H-G)^2}.$$

Damit ein Maximum und Minimum eintrete, müssen B und Q gleich bezeichnet, und entweder stets positiv oder stets negativ sein, ferner muss $H-G$ von Null verschieden sein. Wäre auch $Q=0$, so hätte man ganz einfach für die Glieder der zweiten Ordnung:

$$\left\{\frac{E(H-G) - B(F-G')}{H-G} w^2 + 2Gwu + Ku^2\right\}_{x_1}^{x_2} +$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} B\left(w' + \frac{F-G'}{H-G} w + \frac{H-G}{B} u\right)^2 dx.$$

Im §. 27 hatten wir:

$$B = 0, \quad D = 0, \quad I = 0, \quad K' - C = 0,$$

da ist nun wieder:

$$w = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1}$$
$$u = C_1 \frac{\partial z}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial z}{\partial a_2}$$

und man hat daher ebenfalls in der Formel des §. 27 blos $\frac{\partial y}{\partial a_2} = 0$ zu setzen, um die Formeln für den gegenwärtigen Fall zu haben.

Und nun unterlassen wir ein weiteres Untersuchen specieller, in der allgemeinen Form $V = \varphi(x, y, y', z, z')$ enthaltener Fälle; wir haben ohnedies vielleicht schon zu viel darüber mitgetheilt.